VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODOU NEKONEČNÝCH ŘAD

THE SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF THE INFINITE SERIES METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JANA HRABALOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK , CSc.

BRNO 2008

**Abstrakt**
Tato bakalářská práce se zabývá řešením obyčejných diferenciálních rovnic metodou nekonečných řad, konkrétně mocninných a Fourierových řad. Cílem této práce je na příkladech ukázat řešení počátečního problému pro ODRn založené na rozvoji řešení do vhodné mocninné řady a srovnat tento způsob řešení s klasickým analytickým postupem. Práce si dále klade za cíl na příkladech ukázat řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickou pravou stranou pomocí rozvoje hledaného řešení do Fourierovy řady.

**Summary**
This bachelor's thesis is concerned with the solving of ordinary differential equations by means of the infinite series methods, in particular, the power series and the Fourier series. The aim of this thesis is to find the solution of the initial value problem for ordinary differential equations by use of the power series and compare this approach to traditional analytic methods. Further, the thesis deals with the solving of the second order linear ordinary differential equations with a periodic forcing term via the Fourier series method.

**Klíčová slova**
mocninná řada, Fourierova řada, obyčejná diferenciální rovnice

**Keywords**
power series, Fourier series, ordinary differential equation

HRABALOVÁ, J.*Řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodou nekonečných řad.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 31 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodou nekonečných řad* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc.;, s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jana Hrabalová

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce.

Jana Hrabalová

# Obsah

# 1. Úvod

Diferenciální rovnice hrají zásadní roli při modelování mnoha technických a přírodovědných problémů. Existuje řada analytických metod, které umožňují některé typy diferenciálních rovnic řešit exaktně. Tyto typy však tvoří poměrně úzký okruh diferenciálních rovnic. Na významu proto nabývají i jiné metody řešení, mezi nimiž významné místo zaujímá metoda rozvoje hledaného řešení do vhodné funkční řady.

Tato bakalářská práce se zabývá řešením obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) metodou nekonečných řad, speciálně mocninných a Fourierových řad. Struktura této práce je následující: druhá kapitola shrnuje matematický aparát, který je potřebný pro zvolené řešení diferenciálních rovnic. V třetí kapitole, která se zabývá metodou řešení obyčejných diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad, jsou zmíněny nejprve příklady řešení počátečních problémů pro ODR, které lze řešit i analyticky. Jedná se o diferenciální rovnice prvního i druhého řádu, a to včetně rovnic ilustrujících vybrané aplikace (popis průběhu napětí, náboje a proudu během nabíjení a vybíjení kondenzátoru). Dále jsou zde uvedeny příklady počátečních problémů pro ODR, které nelze řešit analyticky, jako je například Airyho úloha nebo vybrané rovnice se zpožděním. Na konci této kapitoly jsou porovnány oba způsoby řešení, tedy klasické analytické řešení a řešení s využitím mocninných řad. Čtvrtá kapitola uvádí příklady obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou nehomogenní a jejichž pravá strana je periodická funkce. Tyto řešíme pomocí rozvoje do Fourierových řad.

# 2. Matematický aparát

V této kapitole zavedeme nezbytné pojmy a vlastnosti teorie mocninných a Fourierových řad, které budou využity v následujících kapitolách. Zdrojem přehledu byly učební texty [1] a [4].

**Definice 1 (Mocninná řada).** *Mocninnou řadou se středem v bodě $x_0$ rozumíme funkční řadu tvaru*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...,$$

*kde $a_k (k = 0, 1, 2 \ldots)$ jsou konstanty, které nazýváme koeficienty řady.*

**Věta 2 (o poloměru konvergence).** *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konverguje alespoň v jednom bodě $x_1 \neq 0$. Potom existuje takové číslo $R > 0$, že daná řada konverguje absolutně v každém bodě otevřeného intervalu $(-R, R)$, kdežto pro $|x| > R$ nekonverguje.*

**Definice 3.** *Číslo $R$ z Věty 2 se nazývá poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Interval s krajními body $\pm R$, v němž tato řada konverguje, se nazývá konvergenční interval řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.*

**Věta 4 (o stejnoměrné konvergenci mocninných řad).** *Předpokládejme, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom konverguje stejnoměrně (a navíc absolutně) v každém uzavřeném intervalu $\langle x_0 - R^*, x_0 + R^* \rangle \subset (x_0 - R, x_0 + R)$*

**Věta 5 (o derivování mocninných řad).** *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$ a součet $s(x)$. Pak platí*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1},$$

*přičemž mocninná řada na pravé straně má tentýž poloměr konvergence $R$.*

V dalším textu zavedeme dva speciální typy řad, a to řadu Taylorovu (což je případ mocninné řady) a řadu Fourierovu (funkční řadu sinů a kosinů).

**Definice 6 (Taylorova řada).** *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ derivace všech řádů. Potom Taylorovou řadou funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ nazýváme výraz*

$$T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

**Věta 7 (o rovnosti funkce a její Taylorovy řady).** *Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu $I$ derivace všech řádů a nechť $x_0 \in I$ je vnitřním bodem $I$. Potom v tomto intervalu platí*

$$f(x) = T_f^{x_0}(x),$$

*když, a jen když*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

*Přitom nejjednodušší (tzv. Lagrangeův) tvar zbytku $R_n(x)$ je*

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + (x-x_0)\vartheta),$$

*kde $\vartheta$ je blíže neurčené číslo závisející na $x$, přičemž $0 < \vartheta < 1$.*

**Definice 8 (Trigonometrická řada a polynom).** *Trigonometrickou řadou rozumíme nekonečnou funkční řadu*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

*kde $a_k$, $b_k$ jsou konstanty. Přitom $n$-tý částečný součet řady*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

*se nazývá trigonometrický polynom stupně $n$.*

**Definice 9.** *Dá-li se nějaká funkce $f(x)$ vyjádřit trigonometrickou řadou, takže platí*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*kde $a_k$, $b_k$ jsou vhodné konstanty, pak říkáme, že jsme funkci rozvinuli v trigonometrickou řadu.*

**Věta 10 (o Fourierových koeficientech).** *Konverguje-li trigonometrická řada stejnoměrně k integrovatelné funkci $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$, potom platí*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx \mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x \qquad k = 1, 2 \dots. \tag{2.1}$$

**Definice 11 (Fourierova řada).** *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$. Pak trigonometrickou řadu*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*kde koeficienty $a_k$, $b_k$ jsou vyjádřeny vztahy (2.1), nazýváme Fourierovou řadou funkce $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a značíme symbolem $\Phi_f$. Píšeme potom*

$$f \sim \Phi_f.$$

*Tento zápis označuje, že funkční řada $\Phi_f$ patří k funkci $f(x)$. Pokud řada $\Phi_f$ konverguje k funkci $f(x)$, potom píšeme $f(x) = \Phi_f(x)$.*

**Věta 12 (Dirichletova - o bodové konvergenci).** *Nechť $f(x)$ je periodická funkce s periodou $2\pi$, tj. $f(x+2\pi) = f(x)$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$, a nechť $f(x)$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ po částech spojitá a má zde po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada $\Phi_f$ konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ k aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva funkce $f(x)$, takže platí:*

- $\Phi_f = f(x)$ *v každém bodě* $x \in (-\infty, \infty)$*, v němž je* $f(x)$ *spojitá;*
- $\Phi_f = \frac{1}{2}[\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)]$ *v každém bodě* $x_0 \in (-\infty, \infty)$*, v němž je* $f(x)$ *nespojitá.*

**Věta 13 (o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady).** *Nechť $f(x)$ je periodická funkce s periodou $2\pi$, která je na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ spojitá a její derivace $f'(x)$ je na témže intervalu po částech spojitá. Potom Fourierova řada $\Phi_f$ konveruje k funkci $f(x)$ stejnoměrně pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.*

Výše zavedené pojmy a věty se snadno rozšíří na interval libovolné délky (lze tedy uvažovat periodické funkce s libovolnou periodou).

**Princip řešení počátečního problému pro ODRn rozvojem do mocninné řady**

Mějme počáteční problém ODRn (ODR $n$-tého řádu)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad y^{(k)}(x_0) = \gamma_k \quad k = 0, 1, \dots n-1.$$

Řešení budeme předpokládat ve tvaru mocninné řady se středem v bodě, ve kterém je předepsána počáteční podmínka (podmínky), tedy

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

kde koeficienty jsou tvaru

$$a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Prvních $n$ koeficientů je jednoznačně určeno počátečními podmínkami. Dále upravíme a derivujeme zadanou rovnici, a tím získáváme další koeficienty.

**Princip řešení ODR2 rozvojem do Fourierovy řady**

Mějme ODR2 tvaru

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(x). \tag{2.2}$$

Je-li $f$ periodická funkce s periodou $2T > 0$, která je v intervalu $\langle -T, T \rangle$ po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci, pak lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a pravou stranou $f$ má periodické řešení. Toto řešení lze hledat ve tvaru Fourierovy řady.

Je-li

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{T},$$

pak řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega x + B_k \sin k\omega x). \tag{2.3}$$

Vyjádříme si potřebné derivace funkce $y$ a dosadíme do rovnice (2.2). Porovnáme-li koeficienty na obou stranách rovnice, dostaneme pro hledané koeficienty soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0\beta \\ a_k &= A_k(\beta - k^2\omega^2) + \alpha k\omega B_k \\ b_k &= -A_k\alpha k\omega + B_k(\beta - k^2\omega^2). \end{aligned}$$

Jejím řešením nalezneme koeficienty $A_0$, $A_k$, $B_k$ a dosazením do vztahu (2.3) jsme získali hledané partikulární řešení rovnice (2.2).

# 3. Řešení počátečního problému pro ODRn metodou mocninných řad

## 3.1. ODRn, které lze řešit analyticky

**Příklad 1** Řešme počáteční problém:

$$y' = xy, \qquad\qquad y(0) = 1.$$

- **Klasické řešení**

  Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, budeme ji tedy řešit následovně:

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad y = c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

  Dosazením počáteční podmínky dostáváme $c = 1$ a řešení počátečního problému tedy je

  $$y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

- **Řešení rozvojem do mocninné řady**

  Řešení předpokládáme ve tvaru mocninné řady se středem v bodě, ve kterém je předepsána počáteční podmínka, tedy

  $$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}. \tag{3.1}$$

  Pak platí:

  - $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, dle počáteční podmínky $y(0) = 1$, tedy $a_0 = \frac{1}{1} = 1$
  - $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, ze zadání víme $y' = xy \Rightarrow y'(0) = 0y(0) = 0$ a koeficient má hodnotu $a_1 = \frac{0}{1} = 0$
  - $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, pokud zadanou rovnici zderivujeme, platí $y'' = y + xy'$ a dosazením $x = 0$ dostáváme hodnotu $y''(0) = 1$ a koeficient $a_2 = \frac{1}{2}$

  Dále pokračujeme analogicky. Zde je přehled prvních šesti koeficientů s pomocnými výpočty

| | | |
|---|---|---|
| - | $y(0) = 1$ | $a_0 = 1$ |
| $y' = xy$ | $y'(0) = 0$ | $a_1 = 0$ |
| $y'' = y + xy'$ | $y''(0) = 1$ | $a_2 = \frac{1}{2!}$ |
| $y''' = 2y' + xy''$ | $y'''(0) = 0$ | $a_3 = 0$ |
| $y^{(4)} = 3y'' + xy'''$ | $y^{(4)}(0) = 3$ | $a_4 = \frac{3}{4!}$ |
| $y^{(5)} = 4y''' + xy^{(4)}$ | $y^{(5)}(0) = 0$ | $a_5 = 0$ |
| $y^{(6)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)}$ | $y^{(6)}(0) = 15$ | $a_6 = \frac{15}{6!}$ |

Nyní se pokusíme určit obecný vzorec pro výpočet $k$-tého koeficientu. Užitím matematické indukce lze ověřit obecný vztah

$$y^{(k)} = (k-1)y^{(k-2)} + xy^{(k-1)}.$$

Koeficienty $a_k$ lze po úpravě určit takto:

$$a_{2k+1} = 0$$

$$a_{2k} = \frac{1}{2^k k!} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Řešení počáteční úlohy jsme nalezli ve tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.$$

Zbývá ukázat, že obě řešení jsou totožná. Rozvineme tedy funkci $y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ v Taylorovu řadu.

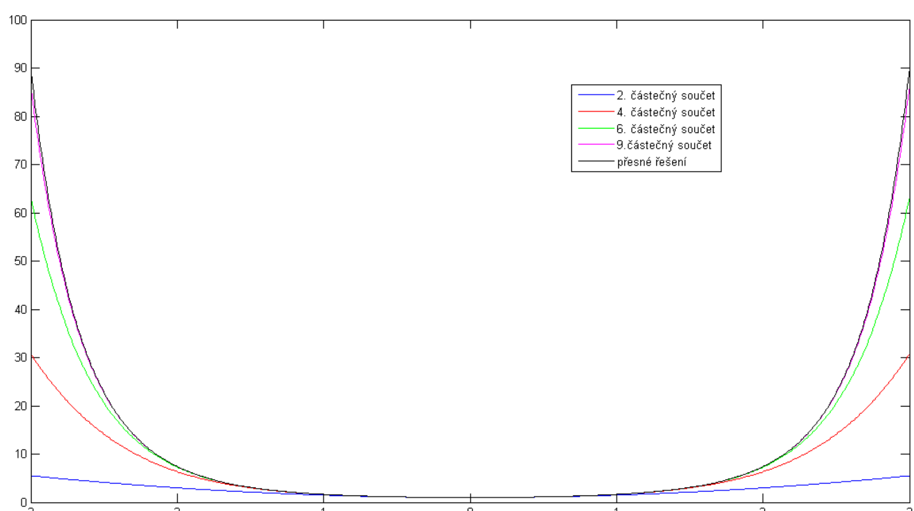
Víme, že

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Substitucí $t = \frac{x^2}{2}$ dostáváme

$$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k},$$

což je tvar, který jsme dostali řešením rovnice rozvojem v mocninnou řadu.




Obrázek 3.1: příklad 1.

**Příklad 2** Řešme počáteční problém:

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2.$$

- **Klasické řešení**

  Jedná se o počáteční problém obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. Analýzou kořenů charakteristické rovnice dostáváme řešení

  $$y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x.$$

  Dosazením počátečních podmínek určíme koeficienty $c_1$ a $c_2$. Řešení zadaného počátečního problému tedy je

  $$y = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

- **Řešení rozvojem do mocninné řady**

  Řešení hledáme ve tvaru (3.1). Popíšeme blíže postup určení několika prvních koeficientů, další jsou pak uvedeny v tabulce níže.

  - První dva koeficienty dané těmito vztahy $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$ určíme s využitím hodnot předepsaných v počátečních podmínkách. Tedy $a_0 = \frac{1}{0!} = 1$ a $a_1 = \frac{2}{1!} = 2$.
  - K určení $a_2$ vycházíme ze zadané rovnice odkud $y''(0) = 2y'(0) - y(0)$. Dosazením do vzorce $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ dostáváme $a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2!} = \frac{3}{2}$.
  - Pro určení následujících koeficientů vycházíme opět z rovnice zadání, ale využíváme její derivace. V případě koeficientu $a_3$ tedy $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{2y''(0)-y'(0)}{3!} = \frac{2\cdot 3-2}{3!} = \frac{4}{6}$.

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $\frac{3}{2!}$ | $\frac{4}{3!}$ | $\frac{5}{4!}$ | $\frac{6}{5!}$ | $\frac{7}{6!}$ |

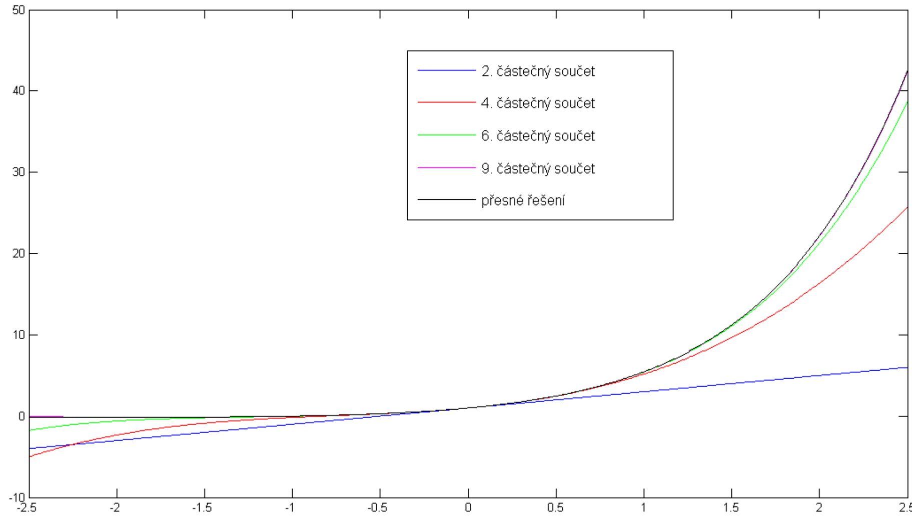
  Z tabulky a pomocí matematické indukce není těžké odvodit vzorec pro $k$-tý člen, tedy $a_k = \frac{k+1}{k!}$. Celkové řešení lze tedy psát ve tvaru

  $$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k.$$

Opět se přesvědčíme, že jsou obě řešení ekvivalentní, rozvojem funkce v Taylorovu řadu. Tentokrát nejprve upravíme řešení získané pomocí mocninných řad.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Nyní si už stačí jen uvědomit, že $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ a vidíme, že $y = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$, což jsme chtěli ukázat.




Obrázek 3.2: příklad 2.

**Příklad 3** Řešme počáteční problém:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \omega, \qquad \omega = 1 + 4k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- **Klasické řešení**

  Jedná se opět o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Analýzou kořenů charakteristické rovnice a určením neurčitých koeficientů s využitím počátečních podmínek získáváme řešení

  $$y = \sin \omega x - \cos \omega x.$$

- **Řešení rozvojem do mocninné řady**

  Postup je obdobný jako v předchozích příkladech, středem mocninné řady zde však není nula, ale $\frac{\pi}{2}$. Řešení tedy předpokládáme ve tvaru:

  $$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k, \qquad a_k = \frac{y^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}.$$

  Uvedeme několik prvních koeficientů $a_k$:

  - $a_0 = \frac{y(\frac{\pi}{2})}{0!}$, z počáteční podmínky $a_0 = \frac{1}{1} = 1$
  - $a_1 = \frac{y'(\frac{\pi}{2})}{1!}$, z druhé počáteční podmínky máme $a_1 = \frac{\omega}{1} = \omega$
  - $a_2 = \frac{y''(\frac{\pi}{2})}{2!}$, ze zadané rovnice plyne $y'' = -\omega^2 y$, tedy $y''(\frac{\pi}{2}) = -\omega^2 \cdot 1 = -\omega^2$, a platí $a_2 = \frac{-\omega^2}{2}$
  - $a_3 = \frac{y'''(\frac{\pi}{2})}{3!}$, zadanou rovnici zderivujeme, máme tedy $y''' = -\omega^2 y'$, po dosazení dostaneme $y''' = -\omega^3$, $a_3 = -\frac{\omega^3}{6}$

Dále postupujeme obdobně, pro názornost opět uvedeme v tabulce několik prvních koeficientů.

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\omega$ | $\frac{-\omega^2}{2!}$ | $\frac{-\omega^3}{3!}$ | $\frac{\omega^4}{4!}$ | $\frac{\omega^5}{5!}$ | $\frac{-\omega^6}{6!}$ | $\frac{-\omega^7}{7!}$ |

Z tabulky lze pomocí matematické indukce odvodit obecný předpis pro $k$-tý člen, který lze zapsat takto:

$$a_{4k} = \frac{\omega^{4k}}{4k!}, \qquad a_{4k+1} = \frac{\omega^{4k+1}}{(4k+1)!}, \qquad a_{4k+2} = \frac{-\omega^{4k+2}}{(4k+2)!}, \qquad a_{4k+3} = \frac{-\omega^{4k+3}}{(4k+3)!}.$$

Řešení počátečního problému je tedy v tomto tvaru:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \frac{\pi}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{[\omega(x - \frac{\pi}{2})]^{(2k)}}{(2k!)} + \frac{[\omega(x - \frac{\pi}{2})]^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \right].$$

Přesvědčíme se, že jsou obě řešení totožná. Víme, že

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Substitucí zjistíme, že

$$\sin \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[\omega(x - \frac{\pi}{2})]^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[\omega(x - \frac{\pi}{2})]^{2k}}{(2k)!}.$$

Což jsou sčítance v řešení, které jsme dostali rozvojem do mocninné řady. Nyní tedy stačí ukázat, že

$$\sin \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega x - \cos \omega x.$$

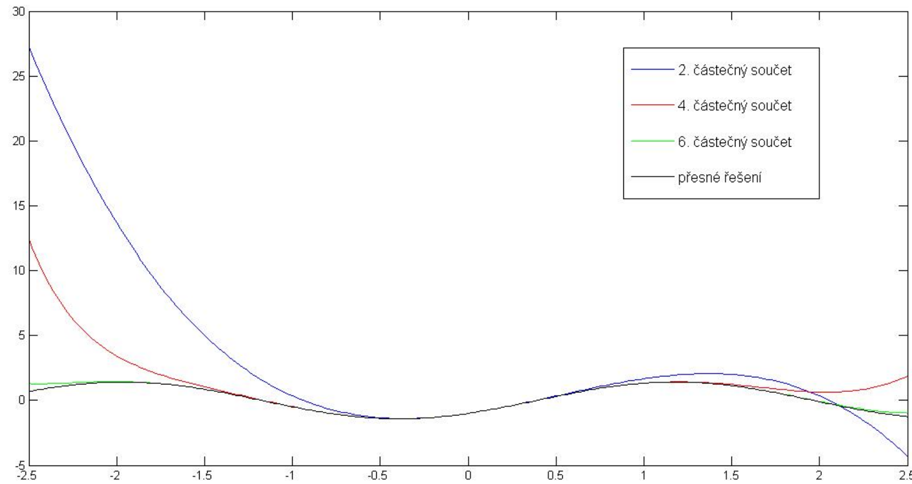
Víme, že

$$\sin \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega x \cos \omega \frac{\pi}{2} - \sin \omega \frac{\pi}{2} \cos \omega x = 0 - \cos \omega x = -\cos \omega x$$

$$\cos \omega \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega x \cos \omega \frac{\pi}{2} + \sin \omega \frac{\pi}{2} \sin \omega x = 0 + \sin \omega x = \sin \omega x.$$

Tímto jsme ukázali, že se obě řešení rovnají.

Poznamenejme ještě, že volba $\omega = 1 + 4k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ byla zvolena především z důvodu jednodušších úprav.




Obrázek 3.3: příklad 3.

**Příklad 4 Nabíjení a vybíjení kondenzátoru**

Příkladem fyzikálního problému, který se řeší pomocí obyčejných diferenciálních rovnic, je nabíjení a vybíjení kondenzátoru v RC obvodu, což je obvod, ve kterém je zapojen rezistor a kondenzátor. Pro úplnost uveďme, že rezistor je součástka, jejíž funkcí v elektrickém obvodu je vytvářet odpor a probíhá v ní (v ideálním případě) nevratná přeměna dodávané elektrické energie v energii tepelnou. Kondenzátor se vyznačuje schopností akumulovat a vydávat energii elektrického pole (podrobněji viz [2] a [3]).

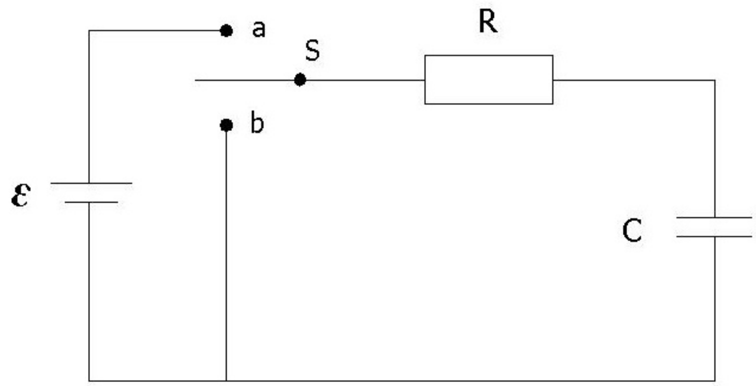
**Nabíjení kondenzátoru**

Problém budeme řešit pro zapojení podle schématu na obr. 3.4. Kondenzátor o kapacitě $C$ nejprve není nabit. Aby se nabil, musí se spínač přepnout do polohy $a$. Po přepnutí vznikne uzavřený sériový $RC$ obvod obsahující kondenzátor o kapacitě C, rezistor o odporu R a ideální baterii o elektromotorickém napětí $\varepsilon$. Jakmile je přepínačem připojena baterie, začne na obou koncích kondenzátoru přecházet elektrický náboj (a tedy i protékat proud) mezi elektrodou kondenzátoru a svorkou baterie. Proud zvětšuje náboj $Q$ na kondenzátoru, a tím i napětí $U_C = \frac{Q}{C}$ na jeho elektrodách. Když se toto napětí vyrovná napětím na svorkách baterie (to je v tomto případě rovno elektromotorickému napětí $\varepsilon$), proud klesne na nulu. Z rovnice $Q = C \cdot U$ plyne, že ustálený (koncový) náboj nabitého kondenzátoru má velikost $C\varepsilon$.

V procesu nabíjení budeme sledovat, jak se v průběhu nabíjení kondenzátoru mění s časem náboj $Q(t)$ na deskách kondenzátoru, napětí $U_C(t)$ na kondenzátoru a proud $I(t)$ v obvodu. Nejprve použijeme 2. Kirchhoffův zákon. Předpokládáme směr proudu proti směru hodinových ručiček a dostaneme tak tuto rovnici

$$\varepsilon - IR - \frac{Q}{C} = 0.$$

Poslední člen na levé straně je napětí na kondenzátoru. Tento člen má záporné znaménko, protože horní deska kondenzátoru připojená ke kladnému pólu baterie má vyšší potenciál než dolní deska a průchodem kondenzátoru se tedy potenciál sníží.




Obrázek 3.4: schéma zapojení RC obvodu.

V této rovnici se ale vyskytují dvě neznámé $Q$ a $I$. Tyto ale nejsou nezávislé a platí pro ně vztah $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Dosazením do rovnice dostáváme

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = \varepsilon.$$

Toto je ODR1, která popisuje časovou změnu náboje $Q$ kondenzátoru a kterou budeme řešit. Hledáme tedy funkci $Q(t)$, kterou si pro přehlednost označíme $y(x)$.

- **Klasické řešení**

  Rovnice, kterou budeme řešit má tedy tento tvar

  $$Ry' + \frac{y}{C} = \varepsilon, \qquad \text{resp.} \qquad y' + \frac{y}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}.$$

  Protože předpokládáme, že před sepnutím spínače byl na kondenzátoru nulový náboj, doplníme ještě počáteční podmínku $y(0) = 0$.

  Jedná se o nehomogenní ODR1, kterou budeme řešit metodou variace konstanty. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici:

  $$y' = -\frac{y}{RC}.$$

  Jedná se o ODR1 se separovanými proměnnými, řešíme ji tedy následovně:

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{x}{RC} + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad y_h = c\mathrm{e}^{-\frac{x}{RC}}.$$

  Dále provedeme variaci konstanty a dostaneme

  $$y = \varepsilon C + k\mathrm{e}^{\frac{x}{RC}}.$$

  Dosazením počáteční podmínky určíme konstantu $k$ a získáme řešení počátečního problému

  $$y = \varepsilon C(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{RC}}), \quad \text{resp.} \quad Q(t) = \varepsilon C(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}).$$

  Stanovení průběhu závislosti proudu i napětí na čase už je snadné, využijeme známých vztahů $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ a $U_C = \frac{Q}{C}$. Tedy

  $$I = \frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad U_C = \varepsilon(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}).$$

- **Řešení rozvojem do mocninné řady**

  Řešení opět předpokládáme ve tvaru mocninné řady (3.1).

  Postup výpočtu koeficientů demonstrujeme na několika prvních z nich níže.

  - První koeficient určíme snadno z počáteční podmínky, tedy $a_0 = \frac{y(0)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$
  - Druhý koeficient získáme úpravou zadané rovnice v bodě $x_0 = 0$, tedy $y'(0) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{y(0)}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$, koeficient $a_1$ má tedy hodnotu $a_1 = \frac{\varepsilon}{R}$
  - Hodnotu dalších koeficientů získáme pomocí derivování zadané rovnice. Druhá derivace má tvar $y'' = -\frac{y'}{RC}$, po dosazení hodnot v konkrétním bodě dostaneme $y'' = -\frac{\varepsilon}{R^2C}$. Obdobně pokračujeme s dalšími koeficienty.

  Více koeficientů uvádíme v tabulce

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{\varepsilon}{R}$ | $-\frac{\varepsilon}{2!R^2C}$ | $\frac{\varepsilon}{3!R^3C^2}$ | $-\frac{\varepsilon}{4!R^4C^3}$ |

Obecný zápis $k$-tého koeficientu pro $k = 1, 2\dots$ lze snadno odvodit jako $a_k = \frac{(-1)^{k-1}\varepsilon}{k!R(RC)^{k-1}}$. Nyní lze tedy průběh závislosti náboje na čase vyjádřit jako

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(RC)^{k-1}k!}x^k \quad \text{resp.} \quad Q(t) = \frac{\varepsilon}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(RC)^{k-1}k!}t^k.$$

Protože Taylorova řada konverguje stejnoměrně, lze ji derivovat člen po členu, takže funkci pro proud, který je časovou derivací náboje, dostáváme jako

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(RC)^{k-1}(k-1)!}t^{k-1}.$$

Průběh napětí pak vyjádříme snadno jako

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{R^{k-1}C^{k-2}k!}t^k.$$

Výsledky, které jsme dostali metodou mocninných řad i klasicky, jsou opět totožné, což zde možná není na první pohled patrné, takže tento fakt alespoň pro $Q(t)$ dokážeme. Převedeme tedy analytické řešení pomocí Taylorova rozvoje do mocninné řady. Je známé, že funkce $\mathrm{e}^t$ má tento Taylorův rozvoj - $\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$. Pomocí substituce snadno dostaneme

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{t}{RC})^k}{k!},$$

tedy po dosazení do vzorce

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) = \varepsilon C\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{t}{RC})^k}{k!}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(RC)^{k-1}k!}t^k.$$

Obě řešení tedy jiným způsobem vyjadřují týž výraz.

**Vybíjení kondenzátoru**

Nyní budeme předpokládat, že kondenzátor na obr. 3.4 je již nabit na napětí $U_0$, které se rovná elektromotorickému napětí $\varepsilon$ baterie. V okamžiku $t = 0$ přepneme spínač S z polohy $a$ do polohy $b$, takže se kondenzátor začne vybíjet přes rezistor $R$.

Opět použijeme 2. Kirchhoffův zákon a získáme rovnici

$$RI + \frac{Q}{C} = 0, \quad \text{resp.} \quad R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Protože byl kondenzátor na počátku nabit, doplníme počáteční podmínku $Q(0) = Q_0$. Takto získáme počáteční problém pro homogenní ODR1 s nenulovou počáteční podmínkou, který budeme řešit.

Opět si pro přehlednost označíme funkci $Q(t)$ jako $y(x)$.

- **Klasické řešení**

  Použitím výše zmíněné substituce budeme tedy řešit tuto počáteční úlohu

  $$Ry' + \frac{y}{C} = 0, \qquad y(0) = Q_0.$$

  Jedná se o ODR1 se separovanými proměnnými, budu tedy postupovat takto

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{x}{RC} + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad y_h = c\mathrm{e}^{-\frac{x}{RC}}.$$

  Po dosazení počátečních podmínek máme tedy

  $$y = Q_0\mathrm{e}^{-\frac{x}{RC}}, \quad \text{resp.} \quad Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

  Průběh proudu získáme zderivováním rovnice pro náboj podle času, tedy

  $$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_0}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

  Znaménko minus vyjadřuje, že náboj kondenzátoru s časem klesá.

- **Rozvojem do mocninné řady**

  Nyní řešení předpokládáme ve tvaru mocninné řady (3.1). V případě výpočtu koeficientů postupujeme stejně jako pro případ nabíjení kondenzátoru, nebudeme zde proto postup popisovat, pouze uvedeme tabulku několika prvních koeficientů a potřebných vztahů.

| - | $y(0) = Q_0$ | $a_0 = Q_0$ |
|---|---|---|
| $y' = -\frac{y}{RC}$ | $y'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$ | $a_1 = -\frac{Q_0}{RC}$ |
| $y'' = -\frac{y'}{RC}$ | $y''(0) = \frac{Q_0}{R^2C^2}$ | $a_2 = \frac{Q_0}{2!R^2C^2}$ |
| $y''' = -\frac{y''}{RC}$ | $y'''(0) = -\frac{Q_0}{R^3C^3}$ | $a_3 = -\frac{Q_0}{3!R^3C^3}$ |

  Obecný zápis pro $k$-tý koeficient pak je $a_k = \frac{(-1)^k Q_0}{k!R^kC^k}$. Řešení tedy můžeme napsat jako

  $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_0}{k!(RC)^k} x^k, \quad \text{resp.} \quad Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_0}{k!(RC)^k} t^k.$$

Řada konverguje stejnoměrně, proto ji můžeme zderivovat člen po členu a vyjádřit tak průběh proudu. Tedy

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_0}{(RC)^k (k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} Q_0}{(RC)^{k+1} k!} t^k.$$

Je snadné nahlédnout, že se příslušná řešení spočtená jinými způsoby shodují.

## 3.2. ODRn, které nelze řešit analyticky

**Příklad 5 Diferenciální rovnice se zpožděním** Řešme počáteční problém:

$$y' = by(\lambda x), \qquad y(0) = 1, \qquad x \geq 0, \qquad b \neq 0, \qquad \lambda \in (0,1).$$

Protože není možno určit řešení analyticky, řešení hledáme jako v předchozích příkladech ve tvaru mocninné řady (3.1). Postup určování koeficientů je obdobný jako u příkladů zmiňovaných výše, uvedeme zde proto pouze tabulku s pomocnými výpočty a hodnotami několika prvních koeficientů.

| | | |
|---|---|---|
| - | $y(0) = 1$ | $a_0 = 1$ |
| $y' = by(\lambda x)$ | $y'(0) = b$ | $a_1 = b$ |
| $y'' = b\lambda y'(\lambda x)$ | $y''(0) = b^2\lambda$ | $a_2 = \frac{b^2\lambda}{2!}$ |
| $y''' = b\lambda^2 y''(\lambda x)$ | $y'''(0) = b^3\lambda^3$ | $a_3 = \frac{b^3\lambda^3}{3!}$ |
| $y^{(4)} = b\lambda^3 y'''(\lambda x)$ | $y^{(4)}(0) = b^4\lambda^6$ | $a_4 = \frac{b^4\lambda^6}{4!}$ |
| $y^{(5)} = b\lambda^4 y^{(4)}(\lambda x)$ | $y^{(5)}(0) = b^5\lambda^{10}$ | $a_5 = \frac{b^5\lambda^{10}}{5!}$ |

Pomocí matematické indukce určíme obecný vzorec pro $k$-tý koeficient

$$a_k = \frac{b^k \lambda^{\binom{k}{2}}}{k!} \qquad k = 2, 3 \ldots.$$

Hledaná mocninná řada je řešením zadaného počátečního problému v tomto tvaru:

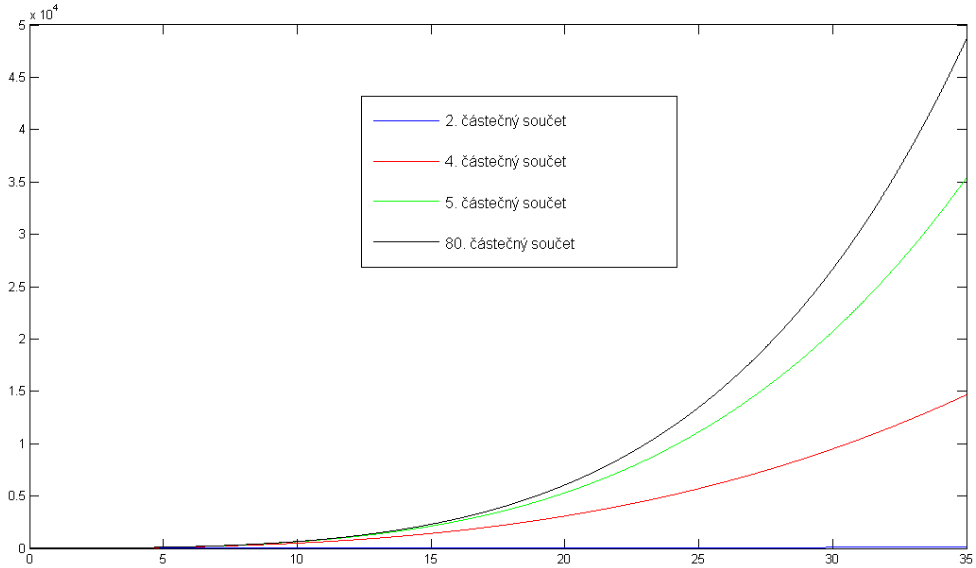
$$y = 1 + bx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b^k \lambda^{\binom{k}{2}}}{k!} x^k$$

Pro grafické znázornění (obr.3.6) jsou použity konstanty $b = 3$ a $\lambda = 0,4$.

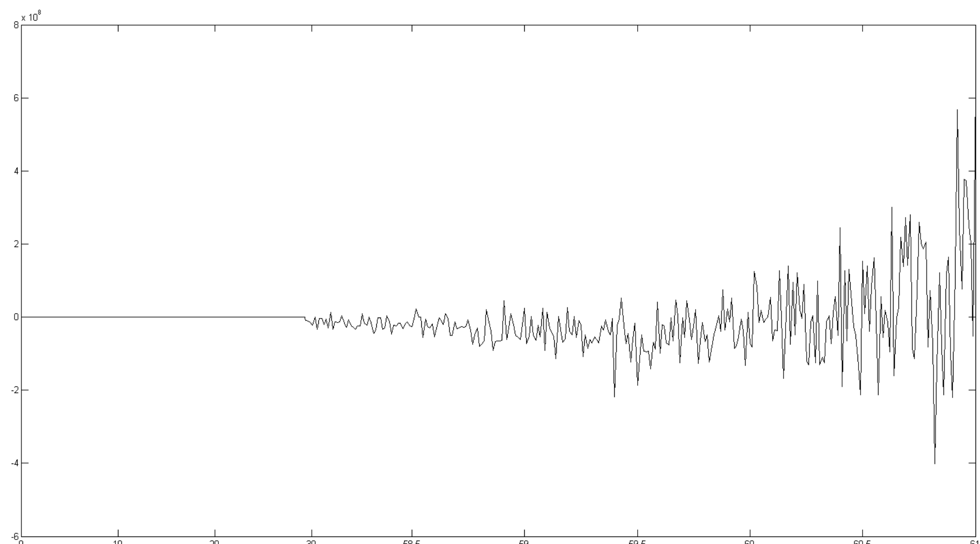
Pokud konstanty $b$ a $\lambda$ zvolíme jinak, a to například $b = -1$ a $\lambda = 0,998$, dostáváme rovnici

$$y'(x) = -y(0,998x). \tag{3.2}$$

Jedná se o rovnici, která je velice „blízká“ rovnici $y'(x) = -y(x)$, kterou umíme řešit analyticky. Její řešení je (při počáteční podmínce $y(0) = 1$) $y = \mathrm{e}^{-x}$. Dalo by se tedy předpokládat, že i průběh řešení uvažované rovnice (3.2) se zpožděním bude velmi podobný funkci $\mathrm{e}^{-x}$. Pokud ale funkci $y = 1 - x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 0,998^{\binom{k}{2}}}{k!} x^k$ vykreslíme, zjistíme, že její průběh zpočátku (v okolí bodu $x = 0$) opravdu přibližně odpovídá předpokladu,




Obrázek 3.5: rovnice se zpožděním.



Obrázek 3.6: „exploze“ řešení.

a řešení zdánlivě rychle konverguje k nule. Po dosažení určitého okamžiku, ale dochází k „rozkmitávání“ řešení a velice rychlému nárustu amplitudy kmitů (viz obrázek 3.6)

**Příklad 6 Airyho rovnice** Řešme počáteční problém pro lineární ODR2 s nekonstantními koeficienty :

$$y'' - xy = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Řešení hledáme ve tvaru mocninné řady (3.1).
Ukážeme výpočet několika prvních koeficientů:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 1$ plyne $a_0 = 1$
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, obdobně jako pro koeficient $a_0$ dostaneme $a_1 = 1$

- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, $y''(x)$ si vyjádříme ze zadané rovnice (pro výpočet dalších koeficientů rovnici zderivujeme), po dosazení $x = 0$ dostáváme $a_2 = 0$

Dále postupujeme standardně, zde uvádíme jen přehled hodnot koeficientů s příslušnými pomocnými výpočty.

| | | |
|---|---|---|
| - | $y(0) = 1$ | $a_0 = 1$ |
| - | $y'(0) = 1$ | $a_1 = 1$ |
| $y'' = xy$ | $y''(0) = 0$ | $a_2 = 0$ |
| $y''' = y + xy'$ | $y'''(0) = 1$ | $a_3 = \frac{1}{6}$ |
| $y^{(4)} = 2y' + xy''$ | $y^{(4)}(0) = 2$ | $a_4 = \frac{2}{4!}$ |
| $y^{(5)} = 3y'' + xy'''$ | $y^{(5)}(0) = 0$ | $a_5 = 0$ |
| $y^{(6)} = 4y''' + xy^{(4)}$ | $y^{(6)}(0) = 4$ | $a_6 = \frac{4}{6!}$ |
| $y^{(7)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)}$ | $y^{(7)}(0) = 10$ | $a_7 = \frac{10}{7!}$ |
| $y^{(8)} = 6y^{(5)} + xy^{(6)}$ | $y^{(8)}(0) = 0$ | $a_8 = 0$ |

Nyní se pokusíme určit obecný předpis pro výpočet koeficientů. Ihned vidíme, že $a_{3k+2} = 0$. Dále si rozepíšeme koeficienty $a_6$ a $a_7$ následovně

$$a_6 = \frac{4 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad a_7 = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Toto obecně lze napsat jako

$$a_{3k+1} = \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} \qquad a_{3k} = \frac{(3k-2)!!!}{3k!} \qquad k = 1, 2 \ldots.$$

Řešením tedy je funkce $y$ vyjádřená takto:

$$y = 1 + x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} + \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1} \right).$$

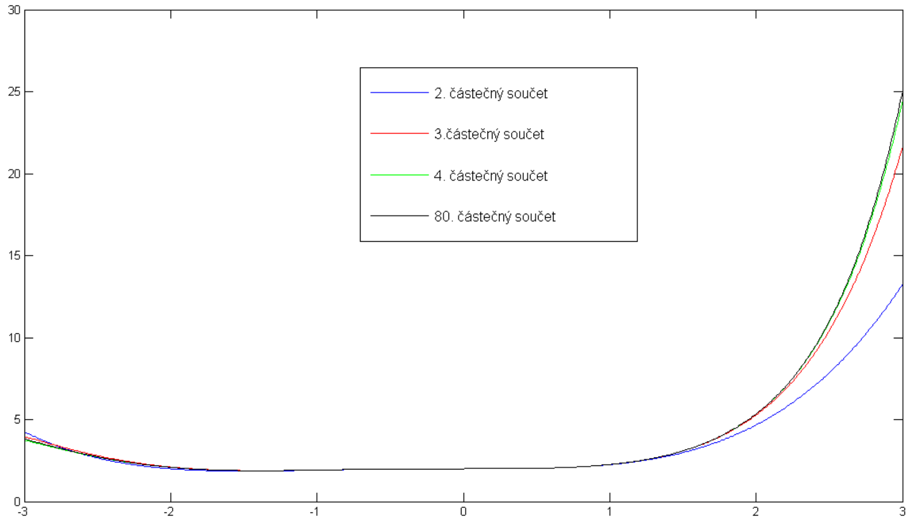
**Příklad 7 Matematické kyvadlo, nelineární ODR2**

Máme kuličku o hmotnosti $m$ zavěšenou na nehmotném a neroztažitelném vlákně délky $l$. Sestavíme diferenciální rovnici popisující pohyb kuličky, přičemž tento pohyb vyjadříme jako funkci okamžité úhlové výchylky $\varphi$ v závislosti na čase $t$, tj. $\varphi = \varphi(t)$. Gravitační sílu rozložíme do směru tečny a normály. Její složka ve směru normály nepůsobí, protože vlákno je neroztažitelné. Složka gravitační síly ve směru tečny je $-mg \sin \varphi$ (neovlivňuje děj proti směru výchylky). Dále předpokládáme, že odpor prostředí je zanedbatelný. Podle obr. 3.8 je $s = l\varphi$, tedy $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$, a odtud podle druhého Newtonova zákona platí

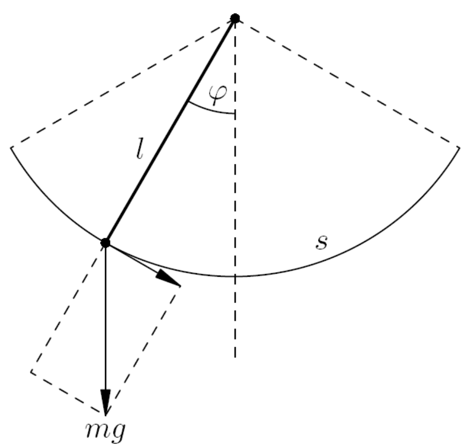
$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi, \qquad \text{resp.} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Ještě zadáme počáteční výchylku a počáteční rychlost.

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0.$$




Obrázek 3.7: Airyho úloha.




Obrázek 3.8: Matematické kyvadlo.

Toto je počáteční problém pro nelineární ODR2, kterou nelze řešit analyticky, pokusíme se ji tedy řešit metodou mocninných řad. Opět pro přehlednost budeme hledanou funkci $\varphi$ značit $y$, proměnnou $t$ nahradíme $x$ a konstantu $\frac{g}{l}$ jako $L$. Řešení tedy předpokládáme ve tvaru (3.1). K výpočtu koeficientů si musíme určit hodnoty derivací funkce $y$ v bodě, ve kterém je zadaná počáteční podmínka. První dvě hodnoty jdou určeny přímo počátečními podmínkami. Dále vycházíme ze zadané rovnice, kterou si vhodně upravíme a zderivujeme. Postupně tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
y'' &= -L\sin y \\
y''' &= -L\cos y y' \\
y^{(4)} &= -L\cos y y'' + L\sin y (y')^2 = L^2\cos y \sin y + L\sin y y'^2 \\
y^{(5)} &= L\sin y y' y'' - L\cos y y''' + L\cos y (y')^3 + 2L\sin y y' y'' = -3L^2\sin^2 y y' + \\
&+ L^2\cos^2 y y' + L\cos y (y')^3 \\
y^{(6)} &= L\cos y (y')^2 y'' + L\sin y \left((y'')^2 + y' y'''\right) - L\sin y (y')^4 + 3L\cos y (y')^2 y'' + \\
&+ L\sin y y' y''' - L\cos y y^{(4)} + 2L\cos y (y')^2 y'' + 2L\sin y \left((y'')^2 + y' y'''\right) = \\
&= -10L^2\cos y \sin y (y')^2 + 3L^3\sin^3 y - L\sin y (y')^4 - L^2\sin^2 y y' - L^3\cos^2 y \sin y.
\end{aligned}
$$

Nyní určíme jednotlivé koeficienty dosazením do vztahu $a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$. Jejich hodnoty uvádíme v tabulce.

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{4}$ | $0$ | $-L\frac{\sqrt{2}}{2!2}$ | $0$ | $L^2\frac{1}{4!2}$ | $0$ | $L^3\frac{\sqrt{2}}{6!2}$ |

Obecně lze říct, že pokud zvolíme nulovou počáteční rychlost, bude každý koeficient $a_{2k+1}$ roven nule, což vyplývá z tvaru příslušných lichých derivací funkce $y$. Jinak ale nelze určit obecný vzorec pro $k$-tý koeficient. Je to dáno tím, že se jedná o rovnici nelineární, tedy již vztah pro třetí derivaci funkce $y'''$ je vyjádřen součinem, jehož činitele jsou funkcí $y$, jeho derivováním tedy dostaneme dva členy stejného charakteru. $K$-tá derivace tedy bude mít $2^{k-3}$ sčítanců (pro $k \geq 3$), které neumíme určit, aniž bychom neznali předcházející derivaci. Hledanou funkci tedy nejsme schopni vyjádřit jako nekonečnou funkční řadu, jsme však schopni dosáhnout libovolného $k$-tého částečného součtu. V našem případě známe šest prvních koeficientů, můžeme tedy napsat, že hledaná funkce se přibližně rovná

$$y(x) \approx \frac{\pi}{4} - L\frac{\sqrt{2}}{2!2}x^2 + L^2\frac{1}{4!2}x^4 + L^3\frac{\sqrt{2}}{6!2}x^6.$$

### Linearizace úlohy

Pro snazší řešení bychom si mohli rovnici zjednodušit, a to tak, že ji linearizujeme. Dostáváme tedy rovnici

$$y'' + Ly = 0.$$

Budeme ji řešit také rozvojem do mocninné řady, tuto rovnici lze ale řešit i klasickým způsobem. Určíme si opět několik prvních koeficientů. Postup zde již nebudeme podrobně rozepisovat, uvedeme jen tabulku s přehledem příslušných derivací funkce $y$ a koeficientů.

| | | |
|---|---|---|
| - | $y(0) = \frac{\pi}{4}$ | $a_0 = \frac{\pi}{4}$ |
| - | $y'(0) = 0$ | $a_1 = 0$ |
| $y'' = -Ly$ | $y''(0) = -L\frac{\pi}{4}$ | $a_2 = -L\frac{1}{2!}\frac{\pi}{4}$ |
| $y''' = -Ly'$ | $y'''(0) = 0$ | $a_3 = 0$ |
| $y^{(4)} = -Ly''$ | $y^{(4)}(0) = L^2\frac{\pi}{4}$ | $a_4 = L^2\frac{1}{4!}\frac{\pi}{4}$ |

Z tabulky snadno určíme obecný vzorec pro $k$-tý koeficient $a_{2k} = (-1)^k L^k \frac{\pi}{(2k!)4}$, $a_{2k+1} = 0$.

Hledané řešení je tedy tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^k \frac{\pi}{(2k!)4} x^{2k} = \frac{\pi}{4} - L\frac{1}{2!}\frac{\pi}{4}x^2 + L^2\frac{1}{4!}\frac{\pi}{4}x^4 - L^3\frac{1}{6!}\frac{\pi}{4}x^6 + \dots$$

Nalézt řešení tedy bylo podstatně jednodušší a podařilo se to dokonce ve tvaru nekonečné řady, ale jak je na první pohled patrné, dochází zde ke značné chybě. Čtvrté členy už si dokonce neodpovídají ani znaménkem. Pokud se blíže podíváme na vyjádření jednotlivých derivací funkce $y$ v obou způsobech řešení, vidíme, že jejich hodnoty budou blízké pro malé počáteční výchylky, to je tam, kde $\sin x \approx 0$ a $\cos x \approx 1$. Platí, že „dobré“ výsledky dostáváme pro výchylky do $\frac{\pi}{36}$.

V tabulce jsou uvedeny hodnoty jednotlivých úhlů v čase $t = 1$ pro různé počáteční výchylky počítané oběma způsoby, v případě nelinearizované úlohy se jedná o hodnotu součtu prvních šesti koeficientů. Délku vlákna $l$ uvažujeme shodnou jako gravitační konstantu.

| | Linearizovaná úloha | Nelinearizovaná úloha | Rozdíl hodnot |
|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2}$ | $0,8487$ | $1,0750$ | $0,2263$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $0,4243$ | $0,4329$ | $8,56 \cdot 10^{-3}$ |
| $\frac{\pi}{8}$ | $0,2122$ | $0,2159$ | $3,69 \cdot 10^{-3}$ |
| $\frac{\pi}{36}$ | $0,0472$ | $0,0472$ | $3,86 \cdot 10^{-5}$ |
| $\frac{\pi}{180}$ | $9,4301 \cdot 10^{-3}$ | $9,4300 \cdot 10^{-3}$ | $1,02 \cdot 10^{-7}$ |

## 3.3. Srovnání obou způsobů řešení ODR

- postupem využívajícím mocninné řady lze vyřešit i počáteční problémy, které nelze řešit klasicky
- pomocí nekonečných řad dostaneme vždy jen přibližné řešení, ale jsme schopni dosáhnout libovolné přesnosti
- rozvojem do mocninné řady se vyhneme integrování, které může být obtížné

# 4. ODR2 řešené pomocí Fourierových řad

**Příklad 1** Řešme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 4y = f(x),$$

kde $f(x)$ je periodickým prodloužením $f^*(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Nejprve je potřeba určit funkci $f$, což je rozvoj funkce $f^*$ do Fourierovy řady. Protože je funkce $f^*(x) = |x|$ funkce sudá, provedeme její rozvoj v kosinovou Fourierovu řadu. Musíme tedy určit koeficienty $a_k$, které jsou dány vztahem

$$a_k = \frac{1}{1}\int_c^{c+2} f(x)\cos\frac{k\pi x}{1}\mathrm{d}x \qquad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Nejprve tedy určíme koeficient $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{0\pi x}{1}\mathrm{d}x = \frac{2}{1}\int_0^1 x\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x}{2}\right]_0^1 = 1.$$

Dále určíme ostatní koeficienty $a_k$ pro $k = 1, 2 \ldots$:

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{k\pi x}{1}\mathrm{d}x = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos k\pi x\mathrm{d}x.$$

Použitím per partes dostáváme

$$a_k = 2\left\{\left[\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\mathrm{d}x\right\} = 2\left\{\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1\right\} = \frac{2}{k^2\pi^2}[\cos k\pi - \cos 0] =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1].$$

Tedy pro

$k$-sudé $a_k = 0$

$k$-liché $a_k = -\frac{4}{k^2\pi^2}$

Funkce $f$ je tedy tvaru

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos{(2k+1)\pi x}.$$

Řešení diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\pi x + B_k\sin k\pi x).$$

Abychom mohli dosadit do zadané rovnice, musíme si vyjádřit i jeho druhou derivaci (užitím odpovídající věty o stejnoměrné konvergenci)

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2\pi^2 A_k \cos k\pi x - k^2\pi^2 B_k \sin k\pi x).$$

Nyní dosadíme do zadání a dostaneme dvě rovnice, pro $k$-liché

$$\begin{aligned} 4 &\left[\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\pi x + B_k \sin k\pi x)\right] - \left[\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\pi^2 A_k \cos k\pi x + k^2\pi^2 B_k \sin k\pi x)\right] = \\ = &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{k^2\pi^2}\cos k\pi x \end{aligned}$$

a pro $k$-sudé

$$4\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\pi x + B_k \sin k\pi x)\right] - \left[\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\pi^2 A_k \cos k\pi x + k^2\pi^2 B_k \sin k\pi x)\right] = \frac{1}{2}.$$

Jestliže porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice, dostaneme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4\frac{A_0}{2} &= \frac{1}{2} & & \\ A_k(4 - k^2\pi^2) &= 0 & & k = 2, 4, 6 \dots \\ A_k(4 - k^2\pi^2) &= -\frac{4}{k^2\pi^2} & & k = 1, 3, 5 \dots \\ B_k(4 - k^2\pi^2) &= 0 & & k = 1, 2, 3 \dots . \end{aligned}$$

Řešením soustavy jsou koeficienty

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{8}, \qquad B_k = 0, \qquad A_{2k} = 0, \qquad A_{2k+1} = \frac{4}{[(2k+1)^2\pi^2 - 4](2k+1)^2\pi^2}.$$

Hledaná funkce $y$ je tedy

$$y(x) = \frac{1}{8} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{[(2k+1)^2\pi^2 - 4](2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x.$$

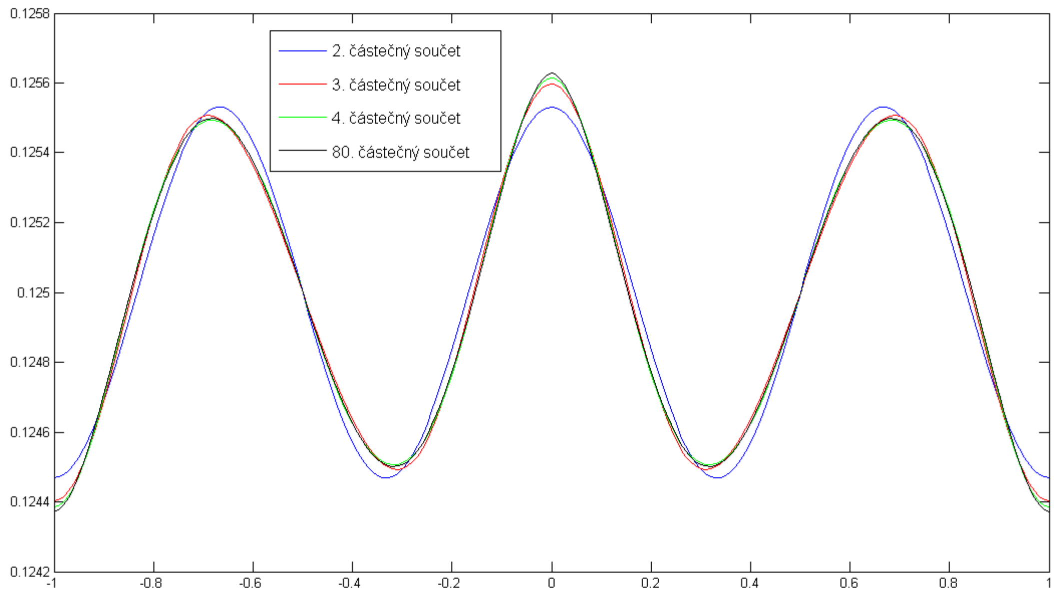
**Příklad 2** Řešme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 5y' + 4y = f(x),$$

kde $f(x)$ je periodickým prodloužením $f^*(x) = \cos x \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Stejně jako v předchozím příkladě nejdřív určíme rozvoj funkce $f^*$ do Fourierovy řady. Opět se bude jednat o řadu kosinovou, protože funkce kosinus je sudá. Spočítáme tedy koeficienty $a_k$ ze vztahů

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2kx \mathrm{d}x \qquad k = 0, 1, 2 \dots .$$




Obrázek 4.1: příklad 1.

Tedy

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}[1-0] = \frac{4}{\pi} \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2kx \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2kx \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2k+1)x + \cos(2k-1)x]\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(-1)^k}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right] = \frac{2(-1)^k}{\pi}\frac{-2}{4k^2-1} = \\
&= \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.
\end{aligned}
$$

Hledaná funkce $f$ má tvar

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kx.$$

Nyní tedy známe pravou stranu rovnice a můžeme hledat její řešení, které předpokládáme ve tvaru

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos 2kx + B_k \sin 2kx).$$

Dále musíme určit i první a druhou derivaci předpokládaného tvaru řešení

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-2kA_k \sin 2kx + 2kB_k \cos 2kx)$$

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-4k^2A_k \cos 2kx - 4k^2B_k \sin 2kx).$$

Tyto dosadíme do zadání a porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice, čímž vznikne tato soustava rovnic

$$\begin{aligned}
4\frac{A_0}{2} &= \frac{2}{\pi} \\
-4k^2A_k + 10kB_k + 4A_k &= \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \qquad k = 1, 2, 3\dots \\
-4k^2B_k - 10kA_k + 4B_k &= 0 \qquad\qquad\qquad k = 1, 2, 3\dots.
\end{aligned}$$

Z první rovnice ihned plyne

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}.$$

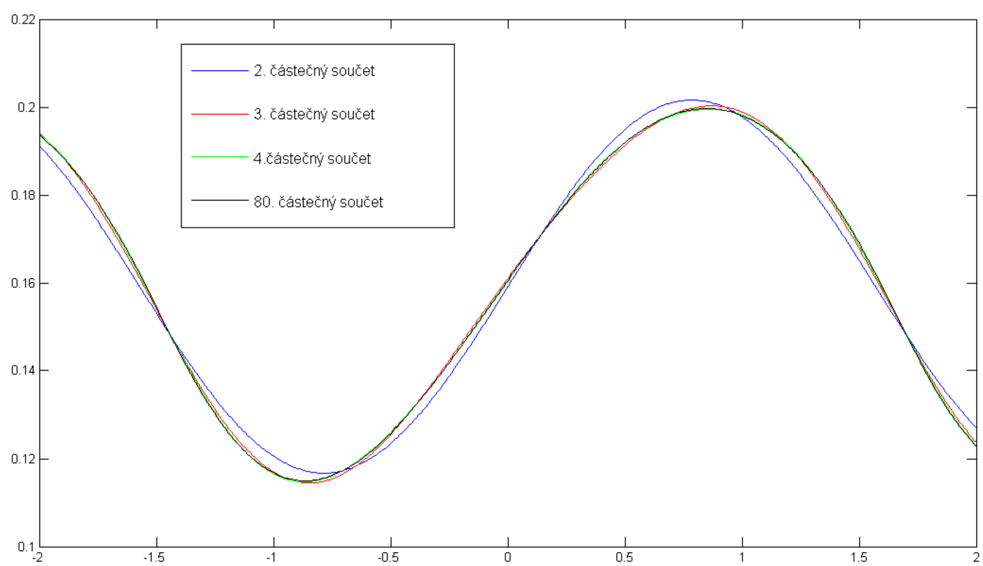
Po řadě úprav dostaneme

$$B_k = \frac{10(-1)^{k+1}k}{[25k^2 + 4(k^2-1)^2]\pi(4k^2-1)},$$

$$A_k = \frac{4(-1)^{k+1}(1-k^2)}{[25k^2 + 4(k^2-1)^2]\pi(4k^2-1)}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice je tedy tvaru

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{[25k^2 + 4(k^2-1)^2]\pi(4k^2-1)}(5k \sin 2kx + 2(1-k^2)\cos 2kx).$$




Obrázek 4.2: příklad 2.

**Příklad 3** Řešme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 9y = f(x),$$

kde $f(x)$ je periodickým prodloužením $f^*(x) = \max\{\sin x, 0; x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Nejprve určíme rozvoj funkce $f^*$ do Fourierovy řady. Nejedná se zde o funkci sudou ani lichou, musíme tedy spočítat koeficienty $a_k$ i $b_k$. Protože v intervalu $\langle \pi, 2\pi\rangle$ je funkce rovna nule, tedy i její integrál na tomto intervalu je roven nule, stačí počítat Fourierovy koeficienty jen na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Nejprve určíme koeficient $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Dále počítáme koeficienty $a_k$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\sin{(k+1)x} - \sin{(k-1)x})\mathrm{d}x.$$

Pro koeficienty $k \neq 1$ dále

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos{(k+1)x}}{k+1} + \frac{\cos{(k-1)x}}{k-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k+1}{k+1} - \frac{(-1)^k+1}{k-1}\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^k+1}{k^2-1}\right].$$

Tedy pro

$k$-liché a $k \neq 1$ $a_k = 0$

$k$-sudé $\qquad a_k = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}$.

Nyní provedeme zvlášť výpočet pro $a_1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\sin^2 x\right] = 0.$$

Dále určíme koeficienty $b_k$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [-\cos{(k+1)x} + \cos{(k-1)x}]\mathrm{d}x.$$

Opět provedeme výpočet nejprve pro $k \neq 1$

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\sin{(k+1)x}}{k+1} + \frac{\sin{(k-1)x}}{k-1}\right]_0^\pi = 0.$$

Dopočítáme ještě koeficient $b_1$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$

Koeficienty jsme tedy určili takto

$$a_{2k} = \frac{-2}{\pi(k^2-1)}, \qquad a_{2k+1} = 0, \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_l = 0, \qquad k = 0, 1, 2\ldots, \quad l = 2, 3\ldots.$$

Rozvoj funkce $f^*$ do Fourierovy řady je tedy

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(k^2-1)}\cos 2kx.$$

Nyní můžeme začít řešit ODR2. Předpokládáme řešení ve tvaru

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Abychom mohli předpokládané řešení dosadit do zadání, musíme si ještě vyjádřit druhou derivaci funkce $y$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k \cos kx - k^2 B_k \sin kx).$$

Dosadíme tedy do zadané rovnice a porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice a dostaneme pro hledané koeficienty soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
9\frac{A_0}{2} &= \frac{1}{\pi} \\
9A_k - k^2 A_k &= -\frac{2}{\pi(4k^2-1)} \qquad k = 2,4,6\ldots \\
9A_k - k^2 A_k &= 0 \qquad k = 1,3,5\ldots \\
9B_1 - B_1 &= \frac{1}{2} \\
9B_k - k^2 B_k &= 0.
\end{aligned}$$

Z první rovnice ihned vidíme

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{9\pi}.$$

Z druhé a třetí rovnice plyne

$$A_k(k^2-9) = \frac{2}{\pi(k^2-1)}, \quad \text{k – liché}, \qquad A_k(k^2-9) = 0, \quad \text{k – sudé}.$$

Tedy

$$A_k = \frac{2}{\pi(k^2-1)(k^2-9)}, \qquad A_3 \in \mathbb{R} \qquad k = 2,4,6\ldots.$$

Ze čtvrté rovnice určíme

$$B_1 = \frac{1}{16}$$

Z poslední rovnice si také vytkneme koeficient a dostáváme

$$B_k(9-k^2) = 0,$$

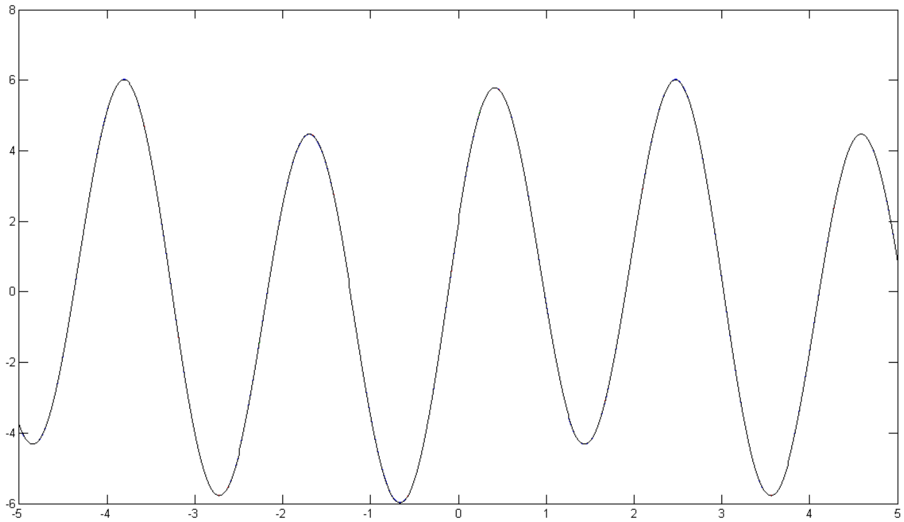
tedy

$$B_k = 0 \qquad B_3 \in \mathbb{R} \qquad k = 1,5,7,9\ldots$$

Řešení je tedy funkce $y(x)$ v tomto tvaru

$$y(x) = \frac{1}{9\pi} + \frac{1}{16}\sin x + (A_3\cos 3x + B_3 \sin 3x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}\cos 2kx,$$

kde $A_3$ a $B_3$ jsou libovolné konstanty.




Obrázek 4.3: příklad 3.

# 5. Závěr

Cílem práce bylo uvést přehled metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic založených na rozvoji řešení do vhodné funkční řady. Nejprve byly uvažovány rozvoje v řady mocninné. Postup zde byl ilustrován na rovnicích, které lze řešit analyticky a v těchto případech bylo zkonstruované řešení vždy srovnáno s řešením exaktním. Metoda však byla aplikována i na diferenciální rovnice, jejichž analytické řešení neznáme. Dále byly prezentovány i postupy řešení lineárních ODR s periodickou pravou stranou, využívající rozvoje řešení do Fourierovy řady. Řešené příklady byly v celém textu doplněny i grafickými ilustracemi dokumentujícími konvergenci příslušných částečných součtů k hledanému řešení.

# Literatura

[1] ČERMÁK, J.,ŽENÍŠEK, A.: *Matematika III.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 205 p. ISBN 80-214-3261-6.

[2] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J.: *Fyzika. Elektřina a magnetismus. Část 3.* Brno, VUTIUM, PROMETHEUS, 2006. ISBN 80-214-1868-0

[3] HAMMER, M.: *Elektrotechnika a elektronika.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 136 p. ISBN 80-214-3334-5.

[4] PRŮCHA, L.: *Řady.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 1996. 106 p. ISBN 80-01-01506-8.

# 6. Seznam použitých zkratek a symbolů

| | |
|---|---|
| ODR | obyčejná diferenciální rovnice |
| ODRn | obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu |
| R | odpor |
| I | proud |
| C | kapacita |
| Q | náboj |
| $\varepsilon$ | elektromotorické napětí |
| m | hmotnost |
| $\varphi$ | výchylka |