VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MAKROSKOPICKÉ MODELOVÁNÍ DOPRAVNÍHO TOKU

MACROSCOPIC TRAFFIC FLOW MODELLING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

KATEŘINA PIDROVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ KISELA, Ph.D.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Kateřina Pidrová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Makroskopické modelování dopravního toku

v anglickém jazyce:

Macroscopic traffic flow modelling

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavní náplní práce bude studium základů makroskopického modelování dopravního toku pomocí diferenciálních rovnic, zejména modelu LWR. Zvláštní důraz bude kladen na diskuzi podmínek, za kterých dochází ke kolapsům dopravy, případně způsobům, jak jim předejít.

Cíle bakalářské práce:

1. Shrnout základní problémy makroskopického modelování dopravního toku.
2. U vybraných modelů diskutovat možnost vzniku dopravních kolapsů, tj. zastavení dopravního toku.
3. Nastínit teoretické možnosti, jak kolapsům předcházet.

Seznam odborné literatury:

1. L. Debnath: Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, 1997.
2. J. Franců: Parciální diferenciální rovnice.
3. H. Zemanová: Modelování dopravního toku, 2012. (bakalářská práce, vedoucí prof. Franců)

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 20.11.2013

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c. Děkan fakulty

Abstrakt
Bakalářská práce se zabývá makroskopickým modelování dopravního toku. Nejdříve je uveden úvod do problematiky modelování dopravního toku obecně, společně s rozdělením modelů. Dále je v práci odvozena rovnice kontinuity pro makroskopické modely. Za účelem jejího řešení je nutné volit konstitutivní vztah pro vyjádření dopravního toku, na kterém závisí to, jak bude daný model vypadat. Hlavní část práce je zaměřena na LWR model řešený metodou charakteristik, s důrazem na šíření rázových vln, tedy vznik dopravního kolapsu. V poslední kapitole je teorie uvedená na příkladu a je v ní také proveden experiment s porovnáním modelu LWR a skutečného provozu na silnici.

Summary
This bachelor thesis is focused on macroscopic traffic flow modelling. First, we present a short introduction into the topic and basic model classification. Then we derive the continuity equation for macroscopic models and outline possible constitutive relations for a flux which determine the key features of the model. The main part of this work is focused on LWR model and its solution by the method of characteristic curves, with emphasize on shockwave creation. The thesis is concluded by an example and experiment comparing of the LWR model with real traffic on highway.

Klíčová slova
modelování dopravního toku, makroskopický model, model LWR, rázová vlna

Keywords
modeling of traffic flow, macroscopic model, model LWR, shockwave

PIDROVÁ, K. *Makroskopické modelování dopravního toku.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 28 s. Vedoucí Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Makroskopické modelování dopravního toku* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Tomáše Kisely, Ph.D. a s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Kateřina Pidrová

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu Ing.Tomášovi Kiselovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady a připomínky.

Kateřina Pidrová

Obsah

1 Úvod **2**

2 Matematický aparát **3**
2.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu 3
2.2 Metoda charakteristik 4

3 Rovnice kontinuity **6**
3.1 Odvození rovnice kontinuity pro dopravní tok 6
3.2 Konstitutivní vztahy pro tok v rovnici kontinuity 8

4 Lighthill - Whitham - Richardsův model **10**
4.1 Metoda charakteristik pro řešení rovnice kontinuity 11
4.2 Vznik rázových vln 13

5 Aplikace modelu LWR na reálný provoz **16**
5.1 Početní řešení 16
5.2 Experiment 20

6 Závěr **25**

Seznam literatury **26**

7 Seznam použitých zkratek a symbolů **27**

A Video soubor **28**

1 Úvod

Koncem 19. století se začal rozvíjet automobilový průmysl. Od toho okamžiku uplynula již dlouhá doba a počet automobilů výrazně vzrostl. Zlepšila se také kvalita silnic a vzdálenosti mezi lidmi se zkracovaly. Jenže zvýšení počtu automobilů nemá jen pozitiva, začaly se mimo jiné tvořit dopravní zácpy a doprava začala kolabovat. Dopravní kolapsy jsou aktuálně jedním z hlavních společenských a ekonomických problémů spojených s dopravou.

Za účelem popsání dopravní situace bylo v posledních padesáti letech sestaveno mnoho matematických modelů. Některé jsou čistě teoretické, jiné zase založené na experimentech. Modely pro modelování dopravního toku lze dělit podle mnoha různých kritérií. Nejpoužívanější je rozdělení podle míry podrobnosti modelu (jak moc detailů potřebujeme znát):

- mikroskopické modely (detailní popis),
- mesoskopické modely (střední popis),
- makroskopické modely (zachycují minimální podrobnosti).

Mikroskopické modely simulují dopravní situaci na vysoké rozlišovací úrovni. Zabývají se chováním a reakcemi jednotlivých řidičů, např. když se řidič rozhodne změnit jízdní pruh, tak je v modelu popsána reakce všech okolních řidičů. V poslední době přibyla ještě další kategorie s názvem submikroskopické modely, kterou můžeme zařadit také do mikroskopických modelů. V těchto modelech pracujeme navíc ještě s údaji o chování vozidla, např. jaký rychlostní stupeň řidič zařadil.

Mesoskopické modely nerozlišují ani nesledují jednotlivá vozidla, ale popisují chování malých skupinek vozidel. Tyto modely jsou většinou založeny na pravděpodobnosti. Zjednodušeně můžeme říci, že vyplňují mezeru mezi mikroskopickými a makroskopickými modely.

Makroskopické modely popisují dění na silnici jako proud vozidel. V těchto modelech nerozlišujeme jednotlivá vozidla. Pro lepší představu si můžeme představit, že celou situaci pozorujeme z letadla, tím pádem nejsme schopni rozlišit jednotlivá vozidla. Pro popis používáme pojmy jako dopravní tok, hustotu dopravního toku a rychlost. V makroskopickém modelu musíme pracovat s takovým úsekem, který je z makroskopického hlediska malý a z mikroskopického hlediska velký, podle [4] má takový úsek na dálnici délku zhruba 100m.

Modely můžeme dále dělit například podle toho, jakými rovnicemi situaci modelujeme (ODR, PDR), nebo jestli používáme v modelu diskrétní, či spojité veličiny.

Tato práce volně navazuje na bakalářskou práci , ale zabývá se detailněji pouze jedním makroskopickým modelem.

Jak již název napovídá, tato bakalářská práce se detailněji zabývá makroskopickým modelováním dopravního toku, čímž volně navazuje na bakalářskou práci [6]. Budeme se zde detailněji zabývat především modelem LWR, který je jedním z prvních pro modelování dopravního toku vůbec. Pro lepší orientaci v problematice je nejdříve uveden matematický aparát, kde jsou zavedeny základní pojmy vyskytující se v celém textu. Pak je odvozena rovnice kontinuity pro makroskopické modely. Z této rovnice vychází všechny makroskopické modely pro modelování dopravního toku. Pak následuje kapitola věnovaná modelu LWR společně s jeho řešením metodou charakteristik, ve které budeme sledovat podmínky vzniku dopravního kolapsu. Poslední kapitola je věnována demonstračnímu příkladu a pokusu o popis reálné situace pomocí LWR modelu.

2 Matematický aparát

V této kapitole je stručně popsána teorie parciálních diferenciálních rovnic, pomocí nichž popisujeme dopravní tok. Rovnice kontinuity pro makroskopické modelování dopravního toku (odvozená v kapitole 3) je parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Dále budeme používat pouze funkce dvou proměnných, protože si reálný případ zjednodušíme na jeden prostorový rozměr a časovou proměnnou. Budeme tedy řešit rovinnou úlohu. Teorie v této kapitole je převzatá a zjednodušená pro rovnice prvního řádu o dvou proměnných z [1].

2.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Parciální diferenciální rovnice je rovnice, ve které je neznámou funkce více reálných proměnných. V dané rovnici se vyskytují parciální derivace této neznámé funkce. Řádem rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici nachází. Parciální diferenciální rovnici prvního řádu tedy zapíšeme následovně:

$$F(u_x, u_t, u, x, t) = 0, \tag{2.1}$$

kde $F(u_x, u_t, u, x, t)$ je daná funkce proměnných x a t, řešení rovnice u a jeho parciálních derivací u_x a u_t.

Rovnici (2.1) nazveme lineární, pokud je funkce F lineární v proměnných u_t, u_x a u. Lineární rovnici prvního řádu tak lze zapsat ve tvaru:

$$a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + b\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + cu(x,t) = f(x,t), \tag{2.2}$$

kde a, b a c se nazývají koeficienty rovnice a mohou to být jednak konstanty, jednak funkce proměnných x a t. Funkce $f(x,t)$, ve které se nenachází neznámá funkce u, se nazývá pravá strana.

Pokud funkce F není lineární (ale musí být libovolně diferencovatelná), potom rovnici (2.1) nazýváme nelineární parciální diferenciální rovnicí.

Cauchyova počáteční úloha

Uvažujme oblast Ω v rovině se souřadnicemi x a t. Souřadnici x si můžeme představit jako přímku a t bude představovat čas. Když koeficient c a funkci f rovnice (2.2) položíme rovny nule, dostáváme homogenní rovnici. Homogenní rovnice prvního řádu bude vypadat takto:

$$a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{2.3}$$

kde $a(x,t)$ a $b(x,t)$ jsou známé funkce, které jsou definované na Ω a nazýváme je koeficienty a dále $u(x,t)$ je neznámá funkce, kterou hledáme.

Rovnice (2.3) má nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli určit její jedno konkrétní řešení, musíme rovnici doplnit počáteční podmínkou.

Mějme křivku Γ v množině Ω, na které předepíšeme hodnoty řešení

$$u = u_0 \qquad \text{na } \Gamma, \tag{2.4}$$

kde u_0 je daná počáteční funkce. Rovnici (2.3) s počáteční podmínkou (2.4) nazýváme Cauchyovou počáteční úlohou.

Dále se budeme zabývat existencí a jednoznačností řešení Cauchyovy úlohy. Existenci a jednoznačnost řešení dané rovnice nám zajistí následující věta.

Věta 1. *Buď Ω oblast v rovině obsahující křivku*

$$\Gamma = \{(x,t) \in \Omega | x = \gamma_1(s), t = \gamma_2(s), s \in I\} \tag{2.5}$$

a uvažujeme úlohu (2.3) a (2.4). Nechť koeficienty jsou spojitě diferencovatelné funkce, tj. a, $b \in C^1(\Omega)$, Γ je hladká křivka a navíc je splněna podmínka

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{na } \Gamma. \tag{2.6}$$

Potom existuje jednoznačné řešení úlohy (2.3) a (2.4) v okolí Γ.

Ideu důkazu věty lze dohledat na straně 17 v [1].

2.2 Metoda charakteristik

Charakteristiky jsou křivky, podél nichž je řešení dané PDR konstantní. Tvoří tedy vrstevnice grafu řešení.

Mějme lineární homogenní diferenciální rovnici, tedy rovnici (2.3). Předpokládáme, že rovnice nedegeneruje, tj. koeficienty a a b nejsou v oblasti Ω současně nulové. Když má hledaná funkce $u(x,t)$ obě parciální derivace, potom je levá strana rovnice v každém bodě směrovou derivací neznámé funkce u ve směru vektoru (a,b).

Dále uvažujme křivku $\Phi = \{(x(s),t(s)) \in \Omega | s \in I\}$ určenou funkcemi $x(s)$ a $t(s)$, které splňují podmínky:

$$x'(s) = a(x(s),t(s)), \tag{2.7}$$

$$t'(s) = b(x(s),t(s)). \tag{2.8}$$

Řešení u podél křivky Φ označíme jako

$$\varphi(s) = u(x(s),t(s)). \tag{2.9}$$

Potom rovnice (2.3) dává

$$\frac{d}{dt}\varphi(s) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}x' + \frac{\partial u}{\partial t}t' = \frac{\partial u}{\partial x}a + \frac{\partial u}{\partial t}b = 0. \tag{2.10}$$

Řešení u je tedy konstantní podél křivky Φ.

Soustavu rovnic (2.7) a (2.8) můžeme řešit v libovolném bodě (x, t) oblasti Ω. Tím dostaneme obecné řešení dané soustavy. Pro určení jednoho konkrétního řešení proto musíme doplnit rovnice počáteční podmínkou např., $s_0(x, 0)$ ležící na křivce Γ. Tím jsme dostali řešení Cauchyovy úlohy metodou charakteristik.

Autonomní soustava rovnic (2.7) a (2.8) se nazývá charakteristickým systémem rovnice (2.3) a křivky určené jejím řešením se nazývají charakteristiky. Skutečně každá funkce $u(x, t)$, která je řešením rovnice, je konstantní podél charakteristik a obráceně rovnici splňuje každá funkce $u(x, t)$ mající spojité první derivace, která je konstantní podél všech charakteristik. Protože řešení $u(x, t)$ je konstantní podél každé charakteristiky, je na charakteristice určeno hodnotou u_0 (z podmínky (2.4)), což je průsečík charakteristiky s křivkou Γ.

U nelineárních rovnic je problém charakteristik navíc komplikován tím, že charakteristiky navíc závisí i na daném řešení rovnice, nejen na dané rovnici. Princip řešení nelineární rovnice je ale v podstatě stejný.

3 Rovnice kontinuity

Pro modelování dopravní situace na silnici potřebujeme nejdříve znát rovnici kontinuity. Tato rovnice kontinuity je platná pouze pro všechny modely pro makroskopické modelování dopravního toku.

Budeme se zabývat dopravní situací z makroskopického pohledu, tedy ne z pohledu jednoho řidiče a situace kolem něj, ale budeme sledovat vývoj celkového množství vozidel v daném bodě silnice. Rychlost vozidla tedy nezávisí na vůli řidiče, ale především na okolních podmínkách (poloha vozidla či hustota provozu). Při makroskopickém modelování předpokládáme, že se v dané situaci zachovají všichni řidiči stejně. Situaci na daném úseku silnice lze přirovnat k laminárnímu proudění kapaliny, kdy nejsme schopni rozlišit jednotlivé molekuly, ale vnímáme kapalinu jako celek.

Rovnice kontinuity je odvozena podle [2].

3.1 Odvození rovnice kontinuity pro dopravní tok

Mějme tedy nekonečně dlouhou rovnou silnici. Silnici považujeme za jednorozměrnou reálnou osu.

Stanovíme si kontrolní úsek s krajními body a a b. Předpokládejme, že v bodě a mohou vozidla do úseku pouze vstupovat, v bodě b jej mohou pouze opouštět. Libovolným bodem uprostřed úseku nemohou vozidla do intervalu ani vstoupit, ani ho jakkoliv opustit. Tento předpoklad odpovídá provozu na dálnici mezi dvěma výjezdy.

Z provozu vozidel na dálnici plyne i poslední požadavek a to takový, že se vozidla pohybují stále ve stejném směru (necouvají, ani se neotočí a nejedou do protisměru). Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že se vozidla pohybují v kladném směru naší referenční osy. Z tohoto odstavce plyne, že náš kontrolní úsek je interval $(a, b) \in \mathbb{R}$.

Celkový počet vozidel v daném úseku a v určitém čase si označíme $M(t)$. Musí platit zákon zachování hmoty, bez toho by neměl model smysl. To pro nás znamená, že počet vozidel, které úsek opustí, se musí rovnat počtu vozidel, které do úseku vstoupí.

Dále potřebujeme znát, kolik vozidel je v daném bodě $x \in (a, b)$ v daném čase t. Tento údaj se nazývá hustota provozu v bodě x v čase t. Hustota je tedy údaj, který nám uvádí počet vozidel na jednotku délky za jednotku času. Hustotu budeme značit $\rho(x, t)$.

Součet hustot v jednotlivých bodech intervalu se musí rovnat celkovému počtu vozidel. Body na silnici se na nám mění spojitě. Tuto závislost tedy vyjádříme integrálem.

$$M(t) = \int_a^b \rho(x, t) dx \tag{3.1}$$

Abychom mohli určit, jak se hustota $\rho(x, t)$ mění v čase, potřebujeme znát dvě věci:

- hustotu $\rho_0(x)$, což je počáteční hustota vozidel (v čase $t = 0$),
- okamžitou rychlost vozidel.

Pro lepší přehlednost zavedeme pojem dopravní tok vozidel v bodě x v čase t, který budeme značit $f(x,t)$. Dopravní tok použijeme analogicky jako např. při modelování toku kapaliny. Dopravní tok vozidel popisuje počet vozidel za jednotku času, které projedou bodem x v čase t. Pokud budeme zmenšovat jednotku délky x na nekonečně malou dx za nekonečně malý čas dt, tak dostaneme dopravní tok definován tímto vztahem:

$$f(x,t) = \frac{\rho(x,t)dx}{dt}. \tag{3.2}$$

Tento vztah můžeme ještě dále upravit. Díky tomu, že okamžitá rychlost vozidla $v(x,t)$ přítomného v bodě x v čase t bude vždy větší, než podíl diferenciálů $\frac{dx}{dt}$, můžeme vztah (3.2) přepsat do následujícího tvaru:

$$f(x,t) = \rho(x,t)v(x,t). \tag{3.3}$$

V některých zdrojích se setkáme s dopravním tokem definovaným přímo vztahem (3.3).

Dále budeme uvažovat libovolný podinterval (c,d) intervalu (a,b), tedy matematicky zapsáno $(c,d) \subset (a,b)$. Stanovíme si čas $t > 0$ a číslo $\varepsilon > 0$. Nyní nás bude zajímat změna množství vozidel mezi body c a d v časovém intervalu $(t, t+\varepsilon)$, kterou vyjádříme pomocí rozdílu celkového počtu vozidel v jednotlivých časech, tedy $M(t+\varepsilon) - M(t)$ a zapíšeme ji takto:

$$M(t+\varepsilon) - M(t) = \int_c^d \rho(x,t+\varepsilon)dx - \int_c^d \rho(x,t)dx. \tag{3.4}$$

V limitě pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme okamžitou změnu počtu vozidel za jednotku času v úseku (c,d) v čase t. Zapsáno matematicky tedy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M(t+\varepsilon) - M(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_c^d \left[\rho(x,t+\varepsilon) - \rho(x,t)\right] dx. \tag{3.5}$$

Z definice dopravního toku plyne, že limita je rovna rozdílu mezi tokem v bodě c a tokem v bodě d. Rozdíl toků je rozdíl mezi dopravním tokem vozidel, které do úseku přijíždí a tokem vozidel, které úsek opouští. Dostáváme tedy následující vztah:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M(t+\varepsilon) - M(t)}{\varepsilon} = f(c,t) - f(d,t). \tag{3.6}$$

Vztah (3.6) rozepíšeme pomocí vztahu (3.5) na následující:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_c^d \left[\rho(x,t+\varepsilon) - \rho(x,t)\right] dx = f(c,t) - f(d,t). \tag{3.7}$$

Přechodem limity za znak integrálu pomocí Lebesgueovy věty (viz věta A.5.3 v [2]) dostáváme:

$$\int_c^d \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx = f(c,t) - f(d,t). \tag{3.8}$$

Všechny členy rovnice převedeme na levou stranu.

$$\int_c^d \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx + f(d,t) - f(c,t) = 0 \tag{3.9}$$

S pomocí vlastností integrálu (viz lemma 4.1 v [1]) upravíme dopravní toky na levé straně rovnice.

$$f(d,t) - f(c,t) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dx \tag{3.10}$$

Dosazením integrálu ze vztahu (3.10) do rovnice (3.9) dostáváme následující rovnici.

$$\int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right] dx = 0 \tag{3.11}$$

Vzhledem k tomu, že tento vztah platí pro libovolný podinterval $(c,d) \in (a,b)$, musí být integrand identicky rovný nule (viz věta A.4.1. v [2]). Dostáváme tak rovnici kontinuity.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = 0 \tag{3.12}$$

Rovnici kontinuity můžeme zapsat i v následujícím tvaru, kdy za $f(x,t)$ dosadíme vyjádření dopravního toku ze vztahu (3.3).

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(v(x,t)\rho(x,t)) = 0 \tag{3.13}$$

Abychom mohli rovnici řešit, potřebujeme k ní ještě počáteční podmínku, kterou zapíšeme takto:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x). \tag{3.14}$$

Ze vztahů (3.13) a (3.14) dostáváme tedy Cauchyovu úlohu.

3.2 Konstitutivní vztahy pro tok v rovnici kontinuity

Rovnice (3.13) je nelineární. Okamžitá rychlost v v rovnici kontinuity (3.13) se vyjadřuje jako funkce proměnných, které se již v rovnici vyskytují, nebo pomocí jiných funkcí, či jejich derivací. Závislost se standardně volí těmito způsoby:

1. $v = v(x,t)$,
2. $v = v(\rho)$,
3. $v = v(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x})$.

První podmínka popisuje rychlost v závislosti na poloze a času. Při řízení auta se s ní setkáváme často v podobě dopravních značek upravujících rychlost, např. při příjezdu do obce zpomalíme na 50 km/hod. V závislosti na čase se můžeme setkat třeba i se značkami, které se mění podle denní doby, například přes den 50km/hod a v noci 80 km/hod (protože je menší provoz).

Modely, u kterých volíme závislost rychlosti na hustotě popisují situaci, která nastane, když se pohybujeme v místě, kde je kolem nás velké množství vozidel. Určitě nepojedeme nejvyšší dovolenou rychlostí. Naopak když budeme na silnici sami, můžeme si dovolit i tu nejvyšší dovolenou rychlost.

Třetí podmínka je složitější variantou předchozí podmínky, kdy řidič vnímá i situaci před sebou, např. vidí, že dojíždí stojící kolonu a tak zpomalí.

Obecně nejjednodušší modely popisuje druhá závislost. V další kapitole se budeme zabývat nejznámějším modelem, který vychází právě z této závislosti.

Rovnici kontinuity můžeme v případě potřeby vyjádřit i v nehomogenním tvaru, tj. s přidáním funkce např. $h(x,t)$ místo 0 na pravou stranu rovnice. Do funkce $h(x,t)$ můžeme například zahrnout i vlivy koncových bodů intervalu (a,b). Z fyzikálního hlediska vzato pravá strana znamená nějaké vnitřní zdroje, v našem případě by to byly například nájezdy na dálnici nebo výjezdy z dálnice uprostřed námi pozorovaného úseku.

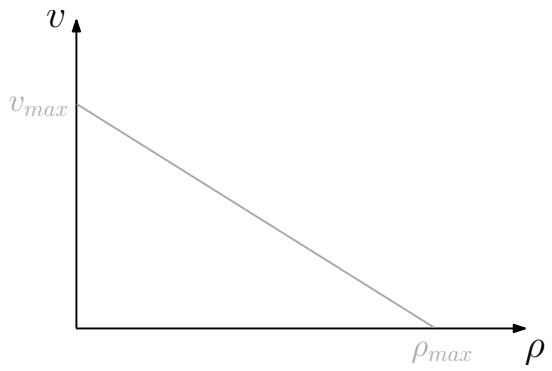
4 Lighthill - Whitham - Richardsův model

V kapitole 3 jsme si odvodili rovnici kontinuity pro dopravní situaci na daném úseku silnice. Problém je, že v rovnici figurují dvě neznámé funkce ρ a v. Proto, abychom mohli rovnici řešit, použijeme v našem modelu jednu funkci vyjádřenou jako funkci druhé funkce. To je možné udělat mnoha různými závislostmi, které popisují jednotlivé modely (viz kapitola 3.2). V této práci se budeme zabývat pouze modelem, který formulovali již v roce 1955 dva muži se jmény Lighthill, Whitham o rok později i Richards. Z počátečních písmen jejich jmen se skládá zkratka LWR, která se často používá pro název tohoto modelu.

Jak již bylo zmíněno v předešlém odstavci, v rovnici kontinuity se vyskytují dvě různé funkce. Rychlost v a hustota ρ. V modelu LWR použijeme empirický vztah, pomocí něhož si vyjádříme rychlost v jako funkci hustoty ρ. Z rovnice kontinuity tedy dostaneme rovnici, která bude pouze funkcí hustoty ρ. Ve vztahu pro vyjádření rychlosti figurují ještě hodnoty v_{max} a ρ_{max}. Jsou to maximální možné hodnoty rychlosti a hustoty pro daný případ.

$$v(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right), \tag{4.1}$$

kde ρ nabývá hodnot od 0 do ρ_{max}. Tedy od nulové do maximální hustoty toku.



Obrázek 4.1: Závislost rychlosti na hustotě provozu

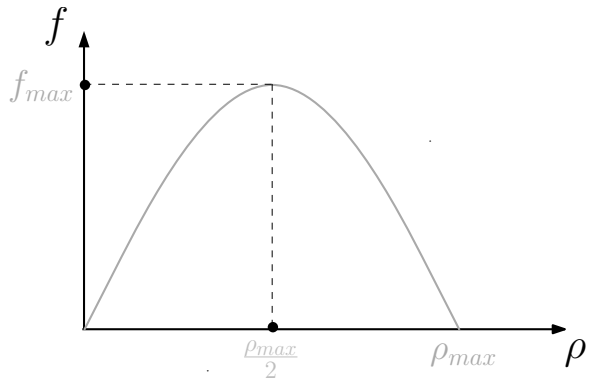
Závislost (4.1) je lineární. Jejím grafem tedy bude přímka. Na obrázku (4.1) je závislost (4.1) vynesená do grafu. Z grafu je patrné, že když je silnice úplně prázdná, může řidič vozidla jet maximální (dovolenou) rychlostí. Zatímco když bude hustota provozu na daném úseku maximální, bude to pro řidiče znamenat, že bude stát v koloně a pohybovat se vpřed nulovou rychlostí. Stejné tvrzení dostaneme, když do vztahu (4.1) dosadíme $\rho = 0$ a $\rho = \rho_{max}$.

Rovnici dopravního toku pro model LWR vyjádříme dosazením vztahu (4.1) za rychlost v do vztahu pro dopravní tok (3.3):

$$f(\rho) = \rho(x,t)v_{max}\left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}}\right). \tag{4.2}$$

Dopravní tok definovaný vztahem (4.2) v závislosti na ρ je vynesený do grafu na obrázku 4.2. Z obrázku 4.2 je patrné, že dopravní tok je největší, když hustota provozu na silnici dosahuje hodnoty, která je rovna polovině maximální hodnoty. Naopak minimální hodnoty jsou v bodech, kde je hustota provozu maximální a minimální. Tento fakt plyne z definice

dopravního toku - když je hustota nulová, bude tok nulový a když je nulová rychlost, tak dopravní tok bude také nulový. Funkce f v závislosti na ρ má parabolický průběh.



Obrázek 4.2: Závislost dopravního toku na hustotě provozu

Při výpočtu řešení rovnice můžeme samozřejmě použít i druhou variantu, kdy bude hustota dopravního toku ρ funkcí rychlosti v. Vztah pro hustotu $\rho(v)$ dostaneme vyjádřením ρ ze vztahu (4.1). Řešení v závislosti na rychlosti je analogické jako v závislosti na hustotě. Dále se budeme zabývat pouze závislostí na hustotě, neboť tyto výsledky jsou lépe představitelné.

4.1 Metoda charakteristik pro řešení rovnice kontinuity

Pro názornost a reálnou představu řešení budeme rovnici řešit pomocí metody charakteristik, která je pro lineární rovnice uvedená v [1] a stručně i v kapitole 2 s názvem Matematický aparát.

Začneme dosazením rychlosti $v(\rho)$ definované vztahem (4.1) do rovnice kontinuity (3.13).

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\left(v_{max}\left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}}\right)\right) = 0 \tag{4.3}$$

Následně v rovnici zderivujeme hustoty podle příslušných proměnných x a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \left(v_{max}\left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) - \left(\frac{\rho(x,t)v_{max}}{\rho_{max}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) = 0. \tag{4.4}$$

Nyní rovnici ještě trochu upravíme. Členy u parciálních derivací hustoty podle proměnné x dáme dohromady a tím dostaneme konečný tvar rovnice kontinuity pro model LWR:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \left(v_{max}\left(1 - \frac{2\rho(x,t)}{\rho_{max}}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) = 0. \tag{4.5}$$

Rovnice (4.5) je nelineární parciální rovnice prvního řádu. Na rovnici nyní aplikujeme metodu charakteristik.

Z definice charakteristiky víme, že řešení je podél ní konstantní. Tedy $\rho(x,t)$ je podél charakteristiky konstantní. Můžeme tedy říci, že hustota provozu v jakémkoliv čase se rovná počátečnímu rozložení hustoty. Platí tedy:

$$\rho(x(t),t) = konst = \rho(x_0,0), \tag{4.6}$$

kde $x(0) = x_0$ je počáteční bod (v čase $t = 0$).

Pomocí totálního diferenciálu řešení $\rho(x,t)$ dostaneme lineární PDR prvního řádu

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\dot{x} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = 0. \tag{4.7}$$

Řešením této rovnice jsou přímky

$$x(t) = x_0 + t\dot{x}. \tag{4.8}$$

Když se podíváme na rovnice (4.7) a (4.5), tak vidíme, že mají pouze jinou část před parciální derivací rychlosti podle x. Můžeme tedy psát:

$$\dot{x}(t) = v_{max}\left(1 - \frac{2\rho(x,0)}{\rho_{max}}\right). \tag{4.9}$$

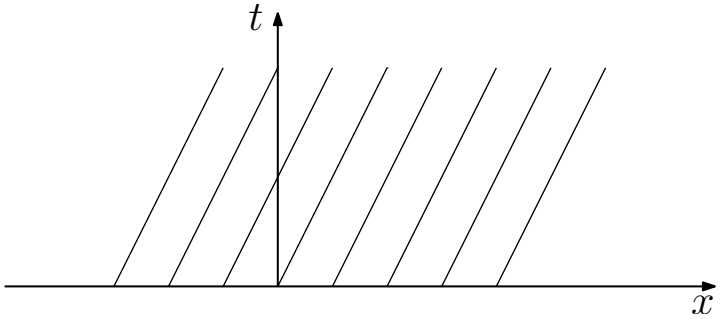
Do rovnice dosadíme $\rho(x_0,0)$ za $\rho(x,t)$ (řešení podél charakteristik je konstantní) a dostaneme tento výraz:

$$\dot{x}(t) = v_{max}\left(1 - \frac{2\rho(x_0,0)}{\rho_{max}}\right). \tag{4.10}$$

Dosazením $\dot{x}(t)$ do řešení rovnice (4.7) dostaneme systém charakteristik pro řešení rovnice kontinuity pro model LWR.

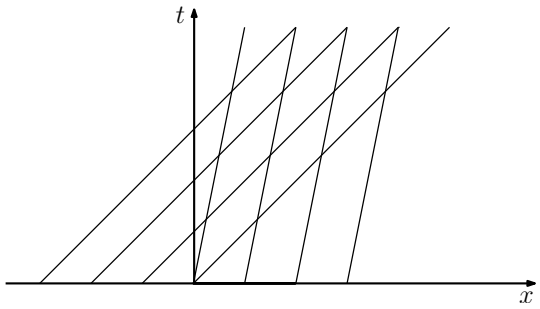
$$x(t) = x_0 + t\left(v_{max}\left(1 - \frac{2\rho(x_0,0)}{\rho_{max}}\right)\right) \tag{4.11}$$

Na obrázku 4.3 jsou v grafu znázorněny charakteristiky rovnice (4.5) za předpokladu, že hustota provozu je ve všech místech úseku stejná. To znamená, že ani okamžitá rychlost vozidel se v tomto úseku nemění. V tomto případě má tedy i nelineární rovnice charakteristiky rovnoběžné (neprotínající se), stejně jako u lineární PDR.



Obrázek 4.3: Systém charakteristik za konstantní hustoty

Na následujícím obrázku 4.4 jsou znázorněny charakteristiky rovnice (4.5), kdy se počáteční hustota mění v jednom bodě skokově z jedné hodnoty na jinou. Charakteristiky jsou opět přímky a v bodě, kde se skokově změní hustota, se změní směrnice přímek. Tím pádem začne docházet k protínání charakteristik (podle poměrů hustot buď před, nebo za bodem se změnou hustoty). Charakteristika v prvním směru přesahuje přes jednu nebo i více charakteristik ve druhém směru a naopak. Charakteristiky v prvním směru (před změnou hustoty) se samozřejmě nikdy neprotnou (analogicky ve druhém), potom by řešení v dané části bylo nejednoznačné.



Obrázek 4.4: Systém charakteristik se skokovou počáteční hustotou

V oblasti, kde se charakteristiky protínají, vzniká v systému rázová vlna. Vzniku a šíření rázových vln je věnována následující kapitola.

4.2 Vznik rázových vln

V důsledku toho, že je rovnice (4.5) nelineární a tedy rovnice jednotlivých charakteristik závisí navíc na počáteční hustotě provozu v daném úseku vozidel, se při nespojité hustotě v některých místech začnou charakteristiky protínat (viz. obrázek 4.4). Vlna, která jejich protnutím vznikne, se nazývá rázová vlna, která může způsobit kolaps dopravy na daném úseku. Pokud by byla hustota na celém úseku konstantní, tak se charakteristiky protínat nebudou (viz obrázek 4.3).

Rázová vlna se může šířit dvěma směry, buď společně s pohybem vozidel na vozovce, nebo proti němu. Vyjímečně může rázová vlna i stát na místě (více viz rozbor situace v příkladu). Ve všech případech je na silnici tedy čím dál větší hustota provozu ve směru jízdy vozidla a tvoří se zde dopravní kolaps.

Pokud se vlna šíří ve směru jízdy vozidel, pak nastává situace, kdy my jako nezávislý pozorovatel můžeme vidět místo, kde vozidla zpomalují, případně jsou nucena úplně zastavit, které se "pohybuje"ve směru jízdy vozidel.

Když se rázová vlna šíří v protisměru k vozidlům, tak v tomto úseku v podstatě vzniká dopravní kolaps bez jakékoliv vnější příčiny (např. zúžení silnice). Rázová vlna je v tomto případě velmi dobře pozorovatelná. Vidíme místo, kde jsou vozidla nucena zastavit, které se "pohybuje"proti jedoucím vozidlům.

Odvození podmínky pro vznik rázové vlny

Tím, že se charakteristiky od různých hustot protínají, je porušena podmínka existence a jednoznačnosti řešení. Proto pokud chceme rovnici dále řešit, tak musíme použít slabé řešení. Rázová vlna je ve své podstatě slabým řešením. Pro její odvození se musíme vrátit

zpět k odvození rovnice kontinuity. Do vztahu (3.8) dosadíme meze a a b, které jsme si zvolili jako krajní body intervalu, na kterém budeme sledovat vznik rázové vlny. Tím, že pro nás není nutná spojitost funkce vzhledem k proměnné x (hledáme slabé řešení), derivaci podle proměnné t nemůžeme dát za znak integrálu. Dostaneme tedy tento vztah:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = f(\rho(a,t)) - f(\rho(b,t)). \tag{4.12}$$

Předpokládejme, že $x = s(t)$ je místo, ve kterém vzniká rázová vlna, tj. hustota se v něm skokově mění. Místo se změnou hustoty leží ve sledovaném úseku a platí tedy: $a < s(t) < b$. Dosazením bodu nespojitosti $s(t)$ do předchozího vztahu dostaneme:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^{s(t)} \rho(x,t)dx + \int_{s(t)}^b \rho(x,t)dx\right] = f(\rho(a,t)) - f(\rho(b,t)). \tag{4.13}$$

Limitním přechodem levé strany rovnice se derivace dostanou za znak integrálu a v rovnici se nám objevují dva nové členy (více viz [5] kapitola 2.3).

$$\rho(s(t)_L,t)\dot{s}(t) + \int_a^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx - \rho(s(t)_R,t)\dot{s}(t) + \int_{s(t)}^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx, \tag{4.14}$$

kde $s(t)_R$ je limita jdoucí zprava k bodu nespojitosti a $s(t)_L$ je limita jdoucí zleva k bodu nespojitosti $s(t)$.

Integrály můžeme sloučit do jednoho integrálu s mezemi a a b, jehož integrand $\rho(x,t)$ bude spojitý a $\rho(s(t)_R,t)$ označíme ρ_R a $\rho(s(t)_L,t)$ označíme ρ_L.

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx + \dot{s}(t)(\rho_L - \rho_R) = f(\rho(a,t)) - f(\rho(b,t)) \tag{4.15}$$

Limitním přechodem pro $a \to s(t)$ a $b \to s(t)$ jde hodnota integrálu k nule, čímž jej odstraníme z rovnice a dostáváme vztah:

$$\dot{s}(t)(\rho_L - \rho_R) = f(\rho_L) - f(\rho_R). \tag{4.16}$$

Vyjádřením $\dot{s}(t)$ z rovnice dostaneme

$$\dot{s}(t) = \frac{f(\rho_L) - f(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R}, \tag{4.17}$$

což je Rankine-Hugenotova podmínka pro vznik rázové vlny.

Ze vzorce (4.17) tedy plyne, že rázová vlna v systému charakteristik vznikne právě tehdy, když je rozdíl hustot na levém a pravém konci nespojitosti větší nebo menší než nula.

Z Rankine-Hugenotovy podmínky můžeme ještě spočítat rovnici rázové vlny v systému charakteristik. V našem případě půjde opět o přímku.

Rankine-Hugenotovu podmínku přepíšeme do tvaru ODR a vyřešíme.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(\rho_L) - f(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R} \tag{4.18}$$

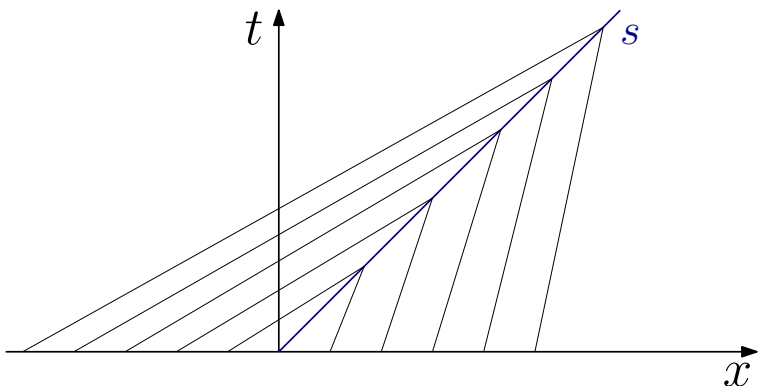
Řešením (integrací) dostaneme vztah

$$x = \left(\frac{f(\rho_L) - f(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R} \right) t. \tag{4.19}$$

Po vyjádření t ze vztahu dostaneme rovnici rázové vlny, která popisuje jakým směrem se rázová vlna pohybuje.

$$t = \left(\frac{\rho_L - \rho_R}{f(\rho_L) - f(\rho_R)} \right) x \tag{4.20}$$

Pro lepší představu rázové vlny se vrátíme zpět do kapitoly 4.1, k řešení rovnice (4.5) metodou charakteristik. Na obrázku 4.4 jsou znázorněny charakteristiky pro systém se skokovou změnou hustoty. Charakteristiky na obrázku se protínají, není v něm zakreslena rovnice rázové vlny, protože v tom okamžiku jsme ji ještě neměli odvozenou. Zatímco na následujícím obrázku 4.5 je vynesen stejný systém charakteristik se skokovou změnou hustoty (pro přehlednost umístěném v bodě [0,0]) společně s rovnicí rázové vlny (4.20), tj. jak se šíří v tomto systému rázová vlna.



Obrázek 4.5: Znázornění rázové vlny v systému charakteristik

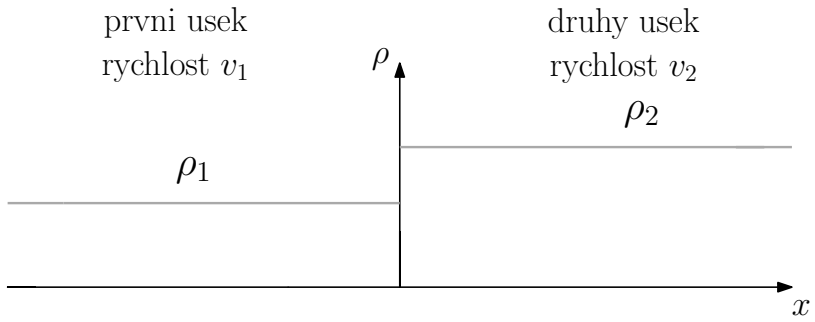
5 Aplikace modelu LWR na reálný provoz

Tato kapitola je zaměřena na použití teorie uvedené v kapitole 4 při řešení příkladu a následně je teorie porovnána s experimenty provedenými ve skutečnosti. Nejdříve výše zmíněnou teorii uvedeme početně. Bude nás nejvíce zajímat, za jakých podmínek vzniká v daném systému dopravní kolaps a jakým směrem se šíří. Ve druhé části kapitoly se budeme věnovat rozboru situace zachycené na videu a dalším experimentům v problematice modelování dopravního toku.

5.1 Početní řešení

Mějme dlouhý rovný úsek, na kterém se skokově v jednom místě mění hustota dopravního toku. Bod, ve kterém se mění hustota, umístíme pro zjednodušení do počátku souřadného systému (do bodu 0). Rychlost vozidel ve sledované části do místa, kde se mění hustota označme v_1. Stejně jako hustotu provozu v tomto úseku označíme ρ_1. Rychlost vozidel v části úseku za změnou hustoty označíme v_2 a hustotu ρ_2. Pro lepší představu je dané označení uvedeno ve vztahu (5.1). Protože se budeme zabývat pouze vznikem rázových vln a tvorbou dopravního kolapsu můžeme už nyní předpokládat, že ρ_2 bude vždy větší než ρ_1. Tato situace je znázorněna na obrázku 5.1 i s popisem jednotlivých veličin.

$$celyusek = \begin{cases} \rho_1; v_1, & x < 0 \\ \rho_2; v_2, & x > 0 \end{cases} \tag{5.1}$$



Obrázek 5.1: Znázornění situace

Maximální rychlost na celém námi sledovaném úseku označíme v_{max} a maximální hustotu, které může provoz na silnici dosáhnout, označíme ρ_{max}. Hustoty v jednotlivých úsecích jsou spjaty s rychlostmi vztahem (4.1), který definuje LWR model. V první části úseku bude vztah (4.1) vypadat takto:

$$v_1(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) \tag{5.2}$$

a ve druhé části takto:

$$v_2(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_{max}}\right). \tag{5.3}$$

Z definice dopravního toku (3.3) tedy dostáváme vyjádření dopravního toku v první části úseku:

$$f_1(\rho) = \rho_1 v_{max} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) \tag{5.4}$$

a analogicky ve druhé části úseku:

$$f_2(\rho) = \rho_2 v_{max} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_{max}}\right). \tag{5.5}$$

Máme tedy pro náš příklad vyjádřené základní veličiny. Dále uvedeme rovnice kontinuity a jejich řešení.

Diferenciální rovnice a její charakteristiky

Pokud bychom chtěli znát dané rovnice kontinuity, stačilo by dosadit $\rho_1(x,t)$ za $\rho(x,t)$ (pro první část úseku) do rovnice (4.5), kterou jsme si v podkapitole 4.2 obecně upravili do vhodného tvaru pro model LWR, případně $\rho_2(x,t)$ za $\rho(x,t)$ (pro druhou část úseku). Použít rovnici kontinuity ve tvaru (3.12) by v tomto případě nebylo efektivní a vedlo by ke zbytečnému upravování vzorců. My ale nyní rovnice kontinuity nepotřebujeme, stačí nám rovnice charakteristik.

Rovnice charakteristik dostaneme způsobem, který je také obecně uvedený v kapitole 4.2. Je proto zbytečné ho zde znovu rozepisovat. Použijeme tedy rovnou výsledný tvar (4.11), do kterého pro první úsek dosadíme počáteční hustotu provozu ρ_1 za $\rho(x_0, 0)$.

$$x(t) = x_0 + t\left(v_{max}\left(1 - \frac{2\rho_1}{\rho_{max}}\right)\right) \tag{5.6}$$

A analogicky do rovnice (4.11) dosadíme počáteční hustotu ρ_2 za $\rho(x_0, 0)$. pro druhou část úseku.

$$x(t) = x_0 + t\left(v_{max}\left(1 - \frac{2\rho_2}{\rho_{max}}\right)\right) \tag{5.7}$$

Nyní máme rovnice charakteristik pro oba směry a zbývá nám zjistit, jak se bude systém charakteristik chovat při různých hodnotách hustot ρ_1 a ρ_2. Díky předpokladu, že ρ_1 je vždy menší než ρ_2 (viz vztah (5.1)), tak můžeme již nyní říct, že směrnice charakteristik pro druhý směr bude vždy menší, než směrnice charakteristik v prvním směru. Co nás bude dále nejvíce zajímat je samozřejmě vznik rázové vlny v systému.

Vznik rázové vlny v systému

V kapitole 4 byla odvozena Rankine-Hugenotova podmínka (4.17), která nám říká, kdy v daném systému vzniká rázová vlna a jakým směrem postupuje. Do rovnice (4.17) dosadíme veličiny s indexem 1 za veličiny s indexem L a veličiny s indexem 2 za veličiny s indexem R. Tedy místo dopravního toku $f(\rho_L)$ dosadíme f_1, místo dopravního toku $f(\rho_R)$ dosadíme f_2. Stejně tak u hustot místo ρ_L dosadíme ρ_1 a místo ρ_R dosadíme ρ_2.

Máme tedy vztah

$$\dot{s}(t) = \frac{f_1 - f_2}{\rho_1 - \rho_2}, \tag{5.8}$$

ve kterém rovnou vyloučíme případ, kdy by se hodnota hustoty ρ_1 rovnala hodnotě ρ_2, protože jinak by nemělo smysl jej vůbec řešit.

Po dosazení z definičních vztahů (5.4) a (5.5) dostáváme:

$$\dot{s}(t) = \frac{\rho_1 v_{max}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) - \rho_2 v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_{max}}\right)}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{5.9}$$

V čitateli vytkneme v_{max} a výrazy v něm převedeme na společný jmenovatel ρ_{max}. Roznásobením vztahů v čitateli čitatele dostáváme:

$$\dot{s}(t) = \frac{v_{max}\left(\rho_1 - \rho_2 + \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_{max}}\right)}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{5.10}$$

Vytknutím ρ_1 - ρ_2 v čitateli a zkrácením se jmenovatelem zlomku dostaneme konečný tvar rovnice:

$$\dot{s}(t) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_{max}}\right). \tag{5.11}$$

Řešením této diferenciální rovnice (stejně jako v kapitole 4.2) dostaneme:

$$x = v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_{max}}\right) t. \tag{5.12}$$

Vyjádřením t z této rovnice dostaneme rovnici rázové vlny:

$$t = \frac{\rho_{max}}{v_{max}\left(\rho_{max} - \rho_2 - \rho_1\right)} x. \tag{5.13}$$

Vznik dopravního kolapsu

Z rovnice (5.11) můžeme prakticky dostat tři možnosti, jak se může situace na daném úseku vyvíjet. Ty záleží pouze na tom, čemu je rovna pravá strana rovnice.

První možností je, že se bude pravá strana rovnice (5.11) rovnat nule. Budeme tedy mít rovnost

$$v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_{max}}\right) = 0. \tag{5.14}$$

Tato rovnost nastane pouze v případě, kdy se bude součet hustoty provozu v první a druhé části úseku rovnat hustotě maximální. Matematicky zapsáno:

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_{max}. \tag{5.15}$$

V tomto případě vznikne v systému rázová vlna. Situace, kdy se $\rho_1 = \rho_2$ tj. když jsou obě hustoty rovné přesně polovině maximální hustoty toku, nastat nemůže. Tu jsme vyloučili ještě před odvozením rovnice (5.11).

Jediná možná situace, která je v tomto případě možná, nastane právě tehdy, když součet hustot ρ_1 a ρ_2 bude roven ρ_{max}, ale hustoty ρ_1 a ρ_2 si rovny nebudou. V tomto případě v systému vznikne rázová vlna, která se nikam nešíří, protože $\dot{s}(t) = 0$. Rovnice rázové vlny má tedy nulovou směrnici a je rovnoběžná s časovou osu.

Další dva případy nastanou, když jsou hustoty v jednotlivých částech rozdílné tak, že jejich součet není roven maximální hustotě a charakteristiky se tím pádem protínají.

Nejdříve se zaměříme na případ, kdy bude součet hustot menší než maximální možná hustota provozu v úseku. Tedy $\rho_1 + \rho_2 < \rho_{max}$. Pravá strana pro rovnici rázové vlny bude mít nyní tvar:

$$v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_{max}}\right) > 0. \tag{5.16}$$

Z rovnice (5.11) tedy plyne, že $\dot{s}(t) > 0$, což znamená, že směrnice rázové vlna je kladná. Protože se zabýváme pouze šířením rázové vlny, máme od počátku příkladu stanoveno, že $\rho_1 < \rho_2$. V tomto systému nám vzniká rázová vlna, která se šíří ve směru jízdy vozidel. Charakteristiky se tedy protínají v prvním kvadrantu.

Posledním případem je zbývající možnost, kdy bude součet hustot větší, než maximální možná hustota. Matematicky zapsáno $\rho_1 + \rho_2 > \rho_{max}$. Pravá strana rovnice (5.11) bude tedy záporná.

$$v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_{max}}\right) < 0 \tag{5.17}$$

Z rovnice (5.11) vidíme, že $\dot{s}(t)$ bude taktéž menší než nula, takže rázová vlna se bude šířit opačným směrem, než je směr jízdy vozidel. Hustota ρ_1 bude v tomhle případě vždy menší než ρ_2 (viz podmínky stanovené vztahem (5.1)). Charakteristiky se budou protínat ve druhém kvadrantu a v námi sledovaném úseku bude vznikat dopravní kolaps v podstatě bez jakékoliv zjevné příčiny (např. zúžení víceproudé silnice do jednoho pruhu nebo dopravní nehody) a rázová vlna se bude šířit proti jedoucím vozidlům, což bychom mohli pozorovat například z letadla.

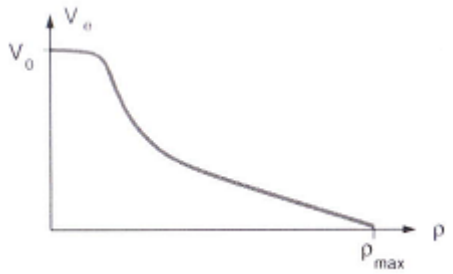
5.2 Experiment

V experimentu jsem se zaměřila na vznik a šíření rázové vlny na dálnici. Zkoumala jsem několik sekund ve videu [9]. Pro lepší dostupnost je dané video vloženo do přílohy A.

Před vlastním experimentem bych zde ráda zmínila jednu vědeckou práci, týkající se modelování dopravního toku a jeden poměrně významný obrázek 5.2, který se týká modelování dopravního toku z praktického hlediska.

Nejdříve bych se zaměřila na experiment japonských vědců, kteří jako první uvedli teorii o vzniku rázových a jejich šíření do praxe. Na kruhové dráze o délce 230m (tj. o poloměru cca 37m) rovnoměrně rozmístili 22 vozidel a nechali je určitou dobu jezdit po okruhu. Řidičům bylo řečeno, že mají následovat vozidlo před sebou (v bezpečné vzdálenosti) a pokusit se jet rychlostí kolem 30 km/h. Uprostřed kruhu měli speciální kameru, která zachytila celých 360 stupňů. V [8] jsou uvedeny obrázky získané zpracováním dat z tohoto experimentu, na kterých je vidět postup rázové vlny v systému. Na serveru youtube.com je také lehce dohledatelné video, které zachycuje průběh tohoto experimentu.

Druhý, avšak neméně důležitý, je obrázek 5.2 z knihy [4]. Je na něm vynesena závislost rychlosti na hustotě jako na obrázku 4.1, s tím rozdílem, že hodnoty v ní jsou aproximované z reálných měření. Tím, že v našem modelu používáme přímku, tak z tohoto obrázku plyne, že pro náš LWR model bude nejlepší sledovat provoz na silnici, když je hustota provozu poměrně velká (v této oblasti se naměřená data chovají jako přímka). Oblast, ve které je hustota provozu nízká, by nebylo vhodné nahrazovat přímkou jako na obrázku 4.1, protože se tam naměřená data chovají jako konstantní funkce a tím by nám vznikaly velké odlišnosti mezi modelem a skutečností.



Obrázek 5.2: Závislost rychlosti na hustotě získaná experimentálně

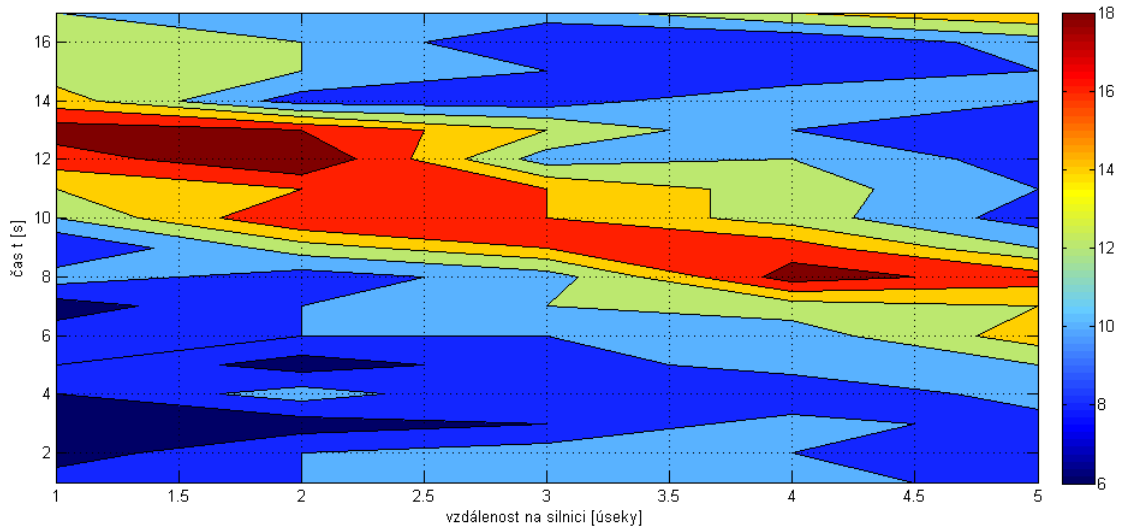
Nyní už k vlastnímu experimentu. Na videu [9] jsem sledovala pouze část silnice. Vybrala jsem 5 úseků, kde jsou podpěry mostu a těmi jsem sledovaný úsek rozdělila na 5 částí viz obrázek 5.3. Video jsem sledovala od času 1 minuta a 15 sekund. Každou sekundu jsem video zastavila a odhadem určila hustotu provozu v jednotlivých úsecích (celkový počet aut v daném úseku). Velká vozidla jako autobusy či nákladní automobily jsem počítala jako dvě osobní auta. Získané hodnoty jsou zapsané v tabulce 5.1. V jednotlivých řádcích tabulky jsou údaje v jeden časový okamžik. Ve sloupcích jsou hustoty z jednotlivých úseků. Pro data v tabulce a následně i na dalších obrázcích je otočen směr jízdy vozidel, aby nedošlo dále k nedorozumění, protože v celé práci předpokládáme směr jízdy vozidel zleva doprava.

Obrázek 5.3: Vybrané úseky na videu

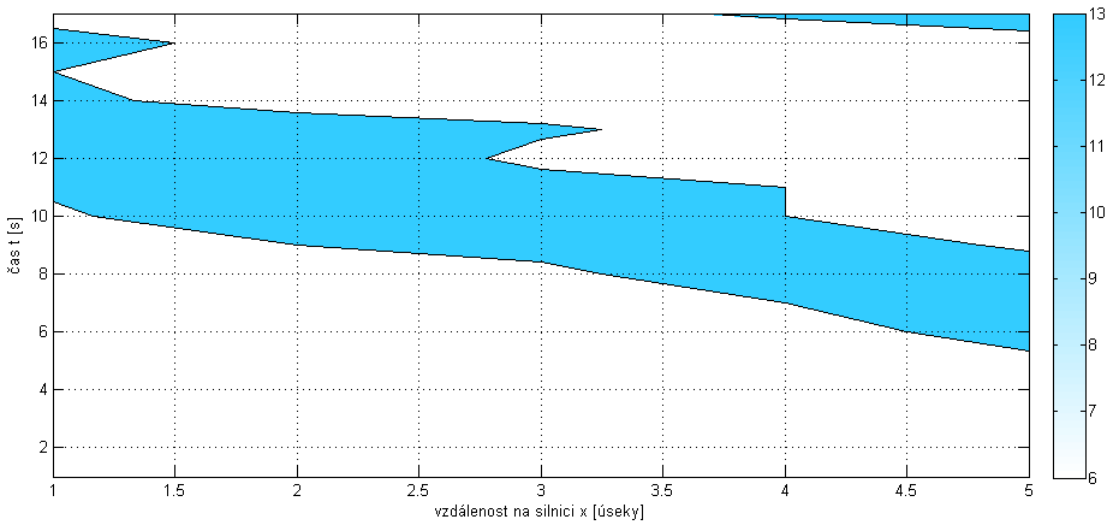
Tabulka 5.1: Tabulka hodnot z videa

čas t [s] \ vzdálenosti x [úsek]	1.úsek	2.úsek	3.úsek	4.úsek	5.úsek
1	9	10	10	11	9
2	7	10	11	10	9
3	6	7	8	11	9
4	8	11	8	8	11
5	10	7	9	11	12
6	9	10	10	11	15
7	7	10	12	13	14
8	11	9	11	19	17
9	8	13	16	17	12
10	12	18	16	13	9
11	14	16	16	13	10
12	17	20	11	12	9
13	19	18	14	10	9
14	15	9	9	12	10
15	13	12	10	8	10
16	14	12	8	8	11
17	12	10	11	14	16

Data z tabulky 5.1 jsem zadala do matice A do softwaru MATLAB. Pomocí příkazu contourf(A) jsem si nechala vykreslit vrstevnicový graf, kde mají místa se stejnou hustotou dopravního toku stejnou barvu. Původní graf je na obrázku 5.4. Následně jsem pro zjednodušení přidala příkazu ještě jeden argument, který mi vykreslil pouze jednu vrstevnici, tím pádem se oblast dat aproximovala dvěma hustotami. Pomocí příkazu contourf(A,1) jsem tak získala následující obrázek 5.5, se kterým budeme dále pracovat. Nižší hustota má hodnotu rovnou 6 a vyšší hustota je rovna 13 (viz boční měřítko u obrázku 5.5).



Obrázek 5.4: Původní vrstevnicový graf



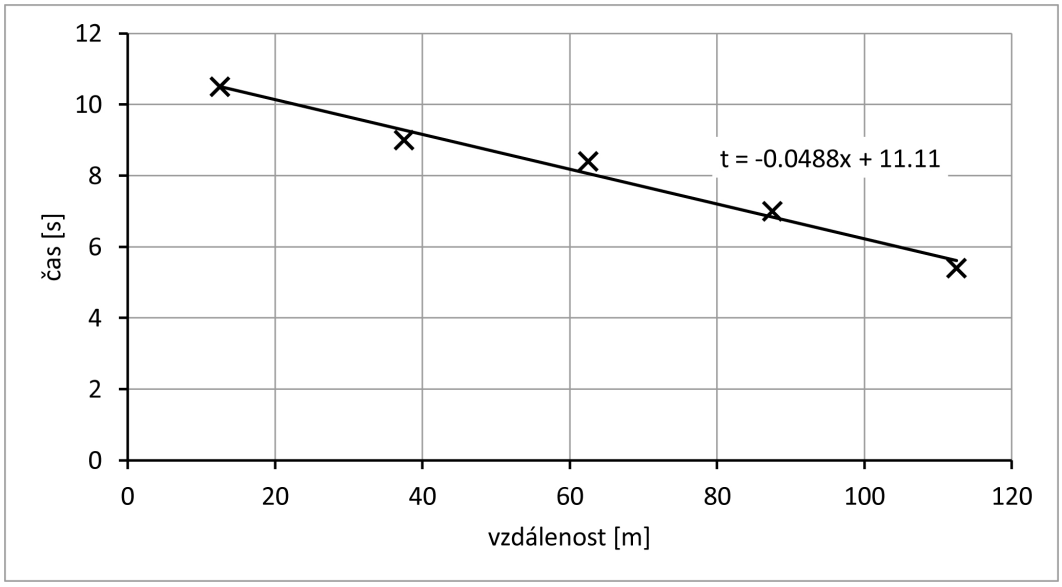
Obrázek 5.5: Vrstevnicový graf s jednou vrstevnicí

Na obrázcích 5.4 a 5.5 je tedy zaměněn směr pohybu vozidel do směru zleva doprava tj. od úseku označeného číslem 1 do úseku označeného číslem 5. Rázová vlna, která je v grafech hezky viditelná, směřuje proti směru jízdy vozidel. Podle výše uvedené teorie by měla od času $t = 5$ sekund vznikat na daném úseku dopravní kolaps. Pozorováním dění na silnici, které je zachycené na videu, lze snadno ověřit pravdivost tohoto tvrzení.

Nyní zkusíme ověřit, zda pro situaci, natočenou na videu, můžeme použít model LWR. Spodní hranici bílé a modré oblasti v obrázku 5.5 si nahradíme přímkou. U bodů 1 - 5 jsem z grafu určila funkční hodnoty, které jsou uvedeny v tabulce 5.2. Těchto pět bodů jsem v programu Excel proložila přímkou pomocí metody nejmenších čtverců a nechala si vypsat rovnici dané přímky (viz obrázek 5.6). Řekněme, že délka jednoho úseku je $25m$. Potom bude délka všech pěti úseků rovna $5 \cdot 25 = 125m$ Jako výchozí vzdálenosti jsem vzala středy úseků (V tomto případě jde jen o to, aby byly vzdálenosti jednotlivých bodů stejné, můžeme vzít např. koncové nebo počáteční body intervalů - na směrnici přímky to nebude mít vliv. Přímka by byla jen posunutá ve směru osy t o jinou konstantu .).

Tabulka 5.2: Tabulka funkčních hodnot

	funkční hodnota
12.5	10.5
37.5	9
62.5	8.4
87.5	7
112.5	5.4



Obrázek 5.6: Graf přímky

Pro zjednodušení výpočtu si zvolíme, že maximální hustota na obrázku 5.5 se bude rovnat maximální hodnotě dosažitelné hustoty provozu na daném úseku ρ_{max}. Použijeme stejné značení jako u předchozího příkladu, tedy veličiny před změnou hustoty budou mít index 1 a po změně index 2. Tedy jak již bylo výše zmíněno jsou hodnoty hustot aproximovány na hodnoty $\rho_1 = 6$ a $\rho_2 = 13$ a $\rho_2 = \rho_{max} = 13$.

Rovnice přímky v grafu 5.6 je $t = -0.0488x + 11.11$, směrnice přímky je tedy rovna $k = -0.0488$. Směrnice přímky se rovná zlomku před neznámou x ve vztahu (5.13).

Dosazením hodnoty ρ_2 za ρ_{max} do vztahu (5.13) dostaneme:

$$t = \frac{\rho_2}{v_{max}\left(\rho_2 - \rho_2 - \rho_1\right)} x. \tag{5.18}$$

Po úpravě vztahu má tedy směrnice k tvar:

$$k = \frac{\rho_2}{v_{max}\left(-\rho_1\right)}. \tag{5.19}$$

Nakonec vyjádříme v_{max} a dosadíme číselné hodnoty:

$$v_{max} = \frac{\rho_2}{k\left(-\rho_1\right)} = \frac{13}{-0.0488 \cdot (-6)} = 44.39 m/s = 159.8 km/hod. \tag{5.20}$$

Dále ještě můžeme spočítat rychlost šíření rázové vlny pomocí vztahu (5.11). Nejdříve dosadíme ρ_2 za ρ_{max}:

$$\dot{s}(t) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_2}\right). \tag{5.21}$$

Vztah ještě zjednodušíme a dosadíme hodnoty.

$$\dot{s}(t) = v_{max}\left(-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = 44.39\left(-\frac{6}{13}\right) = -20.49 m/s = -73.77 km/hod \tag{5.22}$$

Znaménko $-$ před rychlostí znamená, že směr pohybu vlny je v opačném směru k jedoucím vozidlům (což se dalo očekávat vzhledem k tomu, že nám směrnice přímky vyšla záporná).

Maximální rychlost na sledovaném úseku vyšla necelých 160 km/hod, což je hodnota, které lze v dnešní době bez problémů na rychlostních silnicích dosáhnout a na prázdné silnici není tato hodnota nereálná.

Rychlost šíření rázové vlny vyšla 73.77 km/hod, což je zhruba poloviční hodnota maximální rychlosti.

Na závěr tedy můžeme říci, že náš LWR model situaci natočenou na videu, popisuje s poměrně velkou spolehlivostí.

6 Závěr

Cílem této práce bylo shrnutí základních problémů makroskopického modelování dopravní toku a u LWR modelu diskutovat možnost vzniku dopravního kolapsu, případně nastínit teoretické možnosti, jak kolapsu předcházet.

V práci byla nejdříve odvozena rovnice kontinuity pro makroskopické modely. V rovnici je nutné vyjádřit jednu z funkcí, které obsahuje, pomocí jiné funkce, jinak by nebyla řešitelná. Hlavním problémem makroskopického modelování dopravního toku je to, že nelze vytvořit jeden univerzální model. Každý model zohledňuje jiné skutečnosti.

Následně se práce zabývá pouze modelem LWR. V rovnici kontinuity u tohoto modelu je vyjádřena rychlost v závislosti na hustotě toku. Pro tento model byla řešena rovnice kontinuity metodou charakteristik, ze které byly získány zajímavé grafické výsledky. Dále byla pro nespojité rozložení hustot ve sledovaném úseku odvozena Rankine-Hugenotova podmínka a diskutována možnost vzniku dopravního kolapsu. Pomocí ní můžeme pozorovat směr šíření rázové vlny, která se může pohybovat společně s vozidly, do protisměru, nebo existuje i varianta, že vlna bude stát na jednom místě.

Z Rankine-Hugenotovy podmínky plyne, že pokud bude hustota dopravního toku spojitá, tak rázová vlna, tedy dopravní kolaps, nevznikne ihned co začneme daný úsek sledovat. V rámci modelu LWR se dopravní tok sám nezastaví, pokud nestojí už na počátku, kdy jsme začali situaci sledovat.

Dopravnímu kolapsu v rámci našeho modelu můžeme předejít spojitou počáteční podmínkou. Dále můžeme také říct, že čím pozvolněji se bude počáteční podmínka měnit, tak tím později začne rázová vlna v systému vznikat, případně k jejímu vzniku nemusí vůbec dojít.

Na konci práce byl model LWR aplikován na reálný provoz, zachycený na videu. Z výsledku je patrné, že v tomto případě je možné LWR model s relativně dobrou přesností použít.

V budoucnosti se lze dále zabývat LWR modelem se spojitou změnou hustoty, či na něm pozorovat ředění dopravní vlny, což nebylo záměrem této práce. Dále je samozřejmě možné zkoumat detailněji i ostatní modely jednak pro makroskopické modely, jednak pro mikroskopické modely. Možností existuje poměrně hodně.

Seznam literatury

[1] FRANCŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011, 160 s. ISBN 978-80-214-4399-0.

[2] DI FRANCESCO, Marco. *Dispense del corso di Modelli Matematici per l'Ingegneria* [online]. [cit. 2014-05-27]. Dostupné z: `http://people.bath.ac.uk/mdf29/modelli.pdf`

[3] DEBNATH, Lokenath. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. 2nd ed. Boston: Birkhauser, c2005, xx, 737 s. ISBN 08-176-4323-0.

[4] TREIBER, Martin a Arne KESTING. *Traffic flow dynamics: data, models and simulation*. Heidelberg: Springer, 2013, xiii, 503 s. ISBN 978-3-642-32459-8.

[5] WHITHAM, G. *Linear and nonlinear waves*. New York: Wiley, 1974, xvi, 636 p. ISBN 04-719-4090-9.

[6] ZEMANOVÁ, H. *Modelování dopravního toku*. Brno, 2012. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. 32 s. Vedoucí práce prof. RNDr. Jan Franců CSc.

[7] HOOGENDOORN, S. P. a P. H. L. BOVY. State-of-the-art of vehicular traffic flow modelling. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* [online]. 2001-06-01, vol. 215, issue 4, s. 283-303 [cit. 2014-05-27]. DOI: 10.1177/095965180121500402. Dostupné z: `http://pii.sagepub.com/lookup/doi/10.1177/095965180121500402`

[8] SUGIYAMA, Yuki, Minoru FUKUI, Macoto KIKUCHI, Katsuya HASEBE, Akihiro NAKAYAMA, Katsuhiro NISHINARI, Shin-ichi TADAKI a Satoshi YUKAWA. Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam. *New Journal of Physics* [online]. 2008-03-01, vol. 10, issue 3, s. 033001 [cit. 2014-05-27]. DOI: 10.1088/1367-2630/10/3/033001. Dostupné z: `http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=3/a=033001?key=crossref.d9c6328c540467e5d2beaf6961d03278`

[9] "Anonym". Traffic shockwave in a Higway. In: Youtube [online]. Zveřejněno 29. 04. 2009 [vid. 2014-05-27]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=Mh6PNQbKBYo`

7 Seznam použitých zkratek a symbolů

PDR	parciální diferenciální rovnice
ODR	obyčejná diferenciální rovnice
LWR	Lighthill - Whitham - Richardsův model
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$	parciální derivace funkce $f(x,t)$ podle proměnné x
$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$	parciální derivace funkce $f(x,t)$ podle proměnné t
$\frac{d}{dx} f(x)$	derivace funkce $f(x)$
$\int$	znak integrálu
$\rho(x,t)$	hustota provozu v místě x a čase t
$v(x,t)$	rychlost v místě x a čase t
$f(x,t)$	dopravní tok v místě x a čase t
v_{max}	maximální rychlost
ρ_{max}	maximální hustota

A Video soubor

V této příloze je uloženo video, které bylo použito při experimentu v kapitole 5. Video s názvem název **Traffic shockwave in a Higway** ve formátu.mov se nachází na CD v kořenovém adresáři.