



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELOVÁNÍ VLN NA HLADINĚ

MODELING OF SURFACE WAVES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN ZGABAJ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. JAN FRANČŮ, CSc.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Martin Zgabaj

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování vln na hladině

v anglickém jazyce:

Modeling of surface waves

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Modelování vln na vodní hladině vede na parciální diferenciální rovnice. Vedle základní 2D vlnové rovnice existují modely pro vlny na hluboké a mělké vodě, důležitou roli hrají také okrajové podmínky podle druhu břehu.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je odvodit rovnice pro šíření vln na hluboké a mělké vodě, doplnit je vhodnými okrajovými podmínkami a pomocí numerických experimentů porovnat jejich vlastnosti.

Seznam odborné literatury:

M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: Mechanika kontinua, Academia, Praha, 2000.

J. Bajer: Mechanika 3, Chlup.net, Olomouc 2012.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 9.11.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca uvádza odvodenie základných vlastností vln na hladine, medzi ktoré patrí disperzná relácia, tvar vlny, fázová a grupová rýchlosť a pohyb elementu vody. Zaoberá sa ako vlnami na hlbokkej vode, tak aj vlnami na plytkkej vode. Odvodené vlastnosti sú skúmané pre oba tieto prípady. V poslednej časti sú uvedené konkrétne príklady týchto dvoch typov vln.

Summary

This bachelor's thesis presents the derivation of basic characteristics of surface waves which includes the dispersion relation, the shape of the wave, the phase velocity, the group velocity and the movement of water particle. Thesis deals with both deep-water waves and shallow-water waves. Derived characteristics are examined in both cases. In the last part of thesis there are specific examples of those two types of waves.

Kľúčové slová

Modelovanie vln na hladine, vlny na hlbokkej vode, vlny na plytkkej vode, disperzia, vlnová dĺžka, fázová rýchlosť, grupová rýchlosť, tsunami, pobrežné vlny, solitárne vlny, príliv a odliv

Keywords

Modeling of surface waves, deep-water waves, shallow-water waves, dispersion, wavelength, phase velocity, group velocity, tsunami, coastal waves, solitary waves, tidal waves

Prehlasujem, že som bakalársku prácu „Modelování vln na hladině“ vypracoval samostatne pod vedením prof. RNDr. Jana Franců, CSc s využitím materiálů uvedených v zozname použitých zdrojov.

Martin Zgabaj

Ďakujem vedúcemu mojej bakalárskej práce prof. RNDr. Janovi Franců, CSc za trpezlivosť pri vedení tejto práce. Tiež ďakujem konzultantke doc. Ing. Gabriele Holubovej, Ph.D. zo Západočeskej univerzity v Plzni za jej ochotu a cenné rady pri vytváraní tejto práce.

Martin Zgabaj

Obsah

1	Úvod.....	7
2	Základné poznatky o vlnách	8
2.1	Označenie	8
2.2	Harmonická vlna.....	8
2.3	Okrajová podmienka.....	9
2.4	Disperzná relácia	10
2.5	Grupová rýchlosť.....	11
2.6	Pohyb vody.....	11
3	Vlny na hlbkej vode	14
4	Vlny na plytkej vode	16
5	Konkrétne vlny.....	18
5.1	Konkrétne vlny na hlbkej vode.....	18
5.1.1	Vlny a vietor	18
5.2	Konkrétne vlny na plytkej vode.....	19
5.2.1	Tsunami	20
5.2.2	Prílív a odliv	20
5.2.3	Pobrežné vlny	22
5.2.4	Solitárne vlny.....	22
6	Porovnanie vln na hlbkej a plytkej vode.....	24
7	Záver	26

1 Úvod

Na hladinách morí a riek je možné pozorovať jav, ktorému hovoríme vlnenie. Tento jav sa vyznačuje tým, že pri ňom dochádza ku kmitavému pohybu častíc a nie k pohybu samotnej kvapaliny. Zásadné využitie vlnenia na hladine môžeme vidieť v dnes asi najrozšírenejšej aplikácii a to v získavaní energie z vln na mori. Vlnením sa začali vedci zaoberať už na počiatku 19. Storočia. O ich popis sa zaslúžili mená ako Joseph Louis Lagrange, František Josef Gestner, John Scott Russell, William Thomson (Lord Kelvin) a ďalší.

Vlny na hladine môžeme jednoducho charakterizovať ako vychýlenie hladiny z rovnovážnej polohy vplyvom vonkajších síl. Kmitanie vzniká v dôsledku pôsobenia sily, ktorá môže mať rôzny charakter. Môže sa jednať o silu vetra pôsobiaceho na hladinu, o kmitanie vyvolané seizmickou aktivitou a pod. Podľa toho aká sila pôsobí proti vychýleniu hladiny rozoznávame rôzne druhy vln. V prípade pôsobenia tiažovej sily ide o gravitačné vlny. Ak je hlavnou pôsobiacou silou povrchové napätie kvapaliny, hovoríme o kapilárnych vlnách.

V tejto práci sa budeme zaoberať gravitačnými vlnami, a to konkrétne vlnami na hlbokkej vode a vlnami na plytkkej vode. Pre jednoduchosť budeme pracovať s dokonalou nestlačiteľnou a homogénnou kvapalinou.

Vlny na hlbokkej vode sa vyznačujú tým, že sa šíria s omnoho menšou vlnovou dĺžkou ako je hĺbka vody. Naopak, ak hovoríme o vlnách na plytkkej vode, uvažujeme o vlnách s vlnovou dĺžkou rádovo väčšou ako je hĺbka dna.

Cieľom tejto práce je priblíženie základných vlastností vln a ich popis pomocou matematických modelov. Zaoberať sa budeme predovšetkým odvodením základných charakteristík, rozdelením vln na vlny na hlbokkej vode a na vlny na plytkkej vode, pričom osobitne budeme skúmať pojmy ako je disperzná relácia, tvar vln, pohyb elementu vody a iné, pri oboch typoch vln.

Popis odvodení je možné nájsť v [1], [2], [5], [6]. V našom odvodení sa budeme snažiť zjednotiť pojmy a označenia a vyhotoviť odvodenie zrozumiteľné a prehľadné.

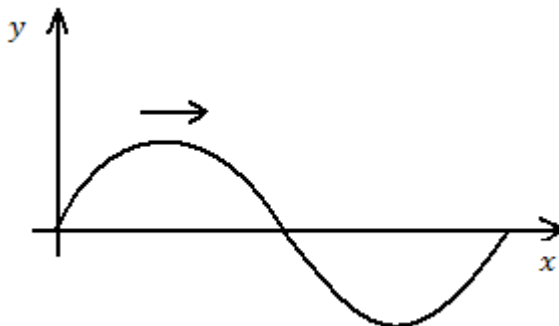
Vyvrcholením práce by mal byť podrobný popis konkrétnych prípadov jednotlivých druhov vln, vysvetlenie ich vzniku, popis ich charakteristík a zaujímavostí. V závere bude uvedená závislosť fázových rýchlostí oboch typov vln na vlnovej dĺžke a hĺbke vody

2 Základné poznatky o vlnách

2.1 Označenie

Keďže táto práca vychádza z viacerých literárnych zdrojov, na začiatok zjednotíme popis modelu a názvy jednotlivých veličín. Zaoberáme sa dvojrozmerným modelom v súradnicovej sústave x a y . Súradnicová sústava je na obrázku (Obr. 2.1). Os y je kolmá na vodorovnú hladinu v pokoji a smer osi x je určený smerom pohybu postupujúcej vlny. Základnými veličinami využívanými v tejto práci a ich označením sú:

- ρ – hustota
- p – tlak
- $\vec{u} = (u_x, u_y)$ – výchylka
- $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – rýchlosť
- g – tiažové zrýchlenie
- φ – rýchlostný potenciál
- λ – vlnová dĺžka
- ω – uhlová frekvencia
- c – fázová rýchlosť
- a – grupová rýchlosť



2.2 Harmonická vlna

Cieľom je popis a matematické vyjadrenie vlny na hladine. Tento popis je možné upresniť pomocou viacerých veličín. Medzi hlavné veličiny popisujúce tvar vlny a jej správanie patrí vlnová dĺžka a uhlová frekvencia. Vzťah medzi týmito dvoma veličinami sa nazýva disperzná relácia a tento vzťah sa snažíme odvodiť. Na splnenie tohto cieľa je potrebné určiť rovnicu, ktorá popisuje túto vlnu a okrajovú podmienku pre hladinu. Ako sme uviedli v úvode, zaoberáme sa dokonalou nestlačiteľnou homogénnou kvapalinou. Správanie tejto kvapaliny je možné popísať Eulerovými rovnicami, rovnicou kontinuity, okrajovými a počiatočnými podmienkami. Rovnica kontinuity má známy tvar

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Pohyb dokonalej tekutiny je nevírivý [1], a preto môžeme definovať pre tento typ kvapaliny rýchlostný potenciál φ , pre ktorý platí

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Z podmienky nevírivosti plynie, že rovnica kontinuity vedie na Laplaceovu rovnicu

$$\Delta \varphi = 0,$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Rovnice vĺn sú popisované harmonickými funkciami, a preto sa pokúsime riešenia Laplaceovej rovnice uhádnuť v tvare

$$\varphi(x, y, t) = A(y) \sin(\omega t - kx),$$

ktorý vychádza z experimentálnych pozorovaní. Pod funkciou $A(y)$ rozumieme závislosť amplitúdy na výške hladiny. Veličinu k nazývame vlnovým číslom a platí vzťah

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Dosadením predpokladaného tvaru riešenia do Laplaceovej rovnice dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - k^2 A = 0.$$

Riešením tejto obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu je závislosť amplitúdy na výške hladiny

$$A(y) = C \cosh ky,$$

kde C je bližšie neurčená konštanta. Rýchlostný potenciál má potom tvar

$$\varphi(x, y, t) = C \cosh ky \sin(\omega t - kx).$$

Týmto sa nám podarilo odvodiť základnú rovnicu harmonickej vlny. Jej dosadením do okrajovej podmienky pre hladinu následne dostávame hľadanú disperznú reláciu. V nasledujúcej podkapitole si odvodíme túto okrajovú podmienku.

2.3 Okrajová podmienka

Na vyjadrenie okrajovej podmienky nám posluží Eulerova rovnica, ktorá má tento tvar

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{g} \rho.$$

V predchádzajúcom odseku sme zaviedli rýchlostný potenciál, pre ktorý platí

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Pre nevírivé pole je možné integrovať upravenú Eulerovu rovnicu, z ktorej dostávame Bernoulliho rovnicu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy = f(t).$$

V ďalšom výklade pre jednoduchosť obmedzíme problematiku na malé vlny. Na základe tohto predpokladu sme schopný zanedbať člen $\frac{v^2}{2}$. Keďže funkcia $f(t)$ je pre všetky miesta kvapaliny rovnaká, môžeme uvažovať o vzdialenom bode od našej vlny, pre ktorý platí, že rýchlostný potenciál na hladine je nulový, tlak na hladine sa rovná atmosferickému tlaku. Výšku hladiny v tomto bode označíme ako H . Po dosadení týchto podmienok do Bernoulliho rovnice dostávame upravený tvar

$$\frac{p_0}{\rho} + gH = f(t).$$

Z predchádzajúcich dvoch rovníc vylúčime parameter $f(t)$ a dostávame linearizovanú Bernoulliho rovnicu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} + g(y - H) = 0 .$$

Pre celú úlohu berieme do úvahy dve okrajové podmienky. Prvou podmienkou je, že na dne je normálová zložka rýchlosti nulová, keďže ide o nepohyblivé dno. Druhou podmienkou je už spomínaný atmosférický tlak na hladine. Naším cieľom je matematický popis správania hladiny. Dosadením podmienky atmosférického tlaku na hladine do linearizovanej rovnice dostávame

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=H+h} + gh = 0 ,$$

kde $h(x, y, t)$ je aktuálne zvlnenie hladiny od pôvodnej nezvlnenej hladiny vo výške H . Pri malých vlnách je možné tento člen aproximovať do tvaru, kde $y = H$. Druhou deriváciou tohto vzťahu dostávame

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right]_{y=H} + g \frac{\partial h}{\partial t} = 0 .$$

Tu si všimneme, že člen $\frac{\partial h}{\partial t}$ vyjadruje zmenu výšky aktuálneho zvlnenia hladiny v čase. Túto skutočnosť ale môžeme dosť presne vyjadriť aj pomocou rýchlostného potenciálu, keďže ide o zložku rýchlosti v smere osi y . Po tejto aproximácii dostávame vzťah, ktorý nám popisuje okrajovú podmienku hladiny, ktorú neskôr využijeme

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=H} = 0 .$$

2.4 Disperzná relácia

V predchádzajúcich dvoch odsekoch sme si pripravili pôdu pre odvedenie disperznej relácie, čo je závislosť medzi uhlovou frekvenciou a vlnovým číslom. Dosadením riešenia Laplaceovej rovnice do počiatočnej podmienky pre hladinu dostávame prípustné kombinácie uhlovej frekvencie a vlnovej dĺžky. Dosadenie

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (C \cosh ky \sin(\omega t - kx)) + g \frac{\partial}{\partial y} (C \cosh ky \sin(\omega t - kx)) \right]_{y=H} = 0 ,$$

$$[-C\omega^2 \cosh ky \sin(\omega t - kx) + gkC \sinh ky \sin(\omega t - kx)]_{y=H} = 0 ,$$

$$\omega^2 \cosh kH = gkC \sinh kH ,$$

$$\omega^2 = gk \tanh kH .$$

Fázovú rýchlosť definovanú vzťahom $c = \frac{\omega}{k}$ môžeme tým pádom rozpísať na tvar

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} .$$

2.5 Grupová rýchlosť

Fázová rýchlosť nám slúži na popis rýchlosti jednej vlny, avšak už nie je postačujúca na popis vln, ktoré vzniknú zložením vln s rovnakou amplitúdou a odlišnou frekvenciou. Pri skladaní takýchto vln zavádzame pojem grupová rýchlosť. Zložené vlny tak majú vlastnú rýchlosť šírenia a premenlivú amplitúdu.

Na odvodenie grupovej rýchlosti použijeme prípad skladania 2 vln s rovnakou amplitúdou a odlišnou frekvenciou. Uhlové rýchlosti označíme ω_1 a ω_2 , vlnové čísla k_1 a k_2 . Podľa postupu v [1] dostávame vlnu s výslednou fázou rovnou

$$\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

Modulovaná amplitúda má napokon vzťah

$$2C \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right),$$

kde C je amplitúda pôvodných vln. Modulovaná amplitúda má najväčšiu hodnotu v miestach, kde

$$\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = 1.$$

Táto situácia nastáva v prípade

$$\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Odtiaľ vyplýva, že skupina vln s touto amplitúdou sa šíri rýchlosťou, ktorá je rovná limite pre rozdiel vlnových čísel idúci k nule z podielu $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

Grupová rýchlosť pre všeobecne odvodenú disperznú reláciu je daná vzťahom

$$a = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} \left(\frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh 2kH} \right).$$

2.6 Pohyb vody

K ďalšiemu popisu vln na hladine je vhodné určiť tvar vln – to ako je hladina naozaj zvlnená. Očakávame, že pohyb vln bude popísaný nejakou funkciou. Keďže vieme, že ide o nevírivý pohyb, vyplýva nám z toho, že na hladine sa bude šíriť energia a fáza [1], ale nebude sa šíriť hmotnosť kvapaliny. Napriek tomu budú častice kvapaliny konať pohyb, ako si následne ukážeme. Tento pohyb častíc nám zapríčini aktuálne zvlnenie hladiny. Keď určíme polohu bodov kvapaliny, určíme aj krivku hladiny. Ako je zjavné, budeme potrebovať priestorové súradnice bodov. Tie získame z rovnice potenciálu. Deriváciou potenciálu podľa priestorových premenných dostávame rovnice pre rýchlosti elementu kvapaliny

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x = -kC \cosh ky \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y = kC \sinh ky \sin(\omega t - kx).$$

Časovou integráciou týchto vzťahov dostaneme výchylky jednotlivých bodov, ale najprv si výrazy pre rýchlosti upravíme tak, aby nám vo výsledku bolo jasné, aké trajektórie opisujú jednotlivé elementy kvapaliny. Táto úprava bude zahŕňať vyjadrenie všetkých členov tak, aby obsahovali spoločné vyjadrenie amplitúdy. Na základe toho sa nám bude lepšie určovať poloha bodov kvapaliny.

Na vyjadrenie použijeme aproximovaný vzorec pre aktuálne zvlnenie hladiny. Aproximáciou je vyjadrenie daného člena v polohe $y = H$ namiesto $y = H + h$.

$$h \approx -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=H} = -\frac{1}{g} \omega C \cosh kH \cos(\omega t - kx).$$

Amplitúdu následne vyjadríme ako

$$A = -\frac{1}{g} \omega C \cosh kH$$

a predchádzajúci vzťah prepíšme do tvaru

$$h \approx A \cos(\omega t - kx).$$

Týmto sme si vyjadrili amplitúdu a teraz ju zahrnieme do vzorcov pre rýchlosti a to tak, že vyjadríme konštantu C a tú dosadíme do rovníc rýchlostí. Takto dostávame vzťahy

$$v_x = -\frac{kg}{\omega} A \frac{\cosh ky}{\cosh kH} \cos(\omega t - kx),$$

$$v_y = \frac{kg}{\omega} A \frac{\sinh ky}{\cosh kH} \sin(\omega t - kx).$$

Na to, aby sme mohli pristúpiť k spomínanej časovej integrácii, musíme zaviesť ďalšiu aproximáciu. Celková rýchlosť je zložená z dvoch rýchlostí a to: lokálnej $\frac{\partial u}{\partial t}$ a z rýchlosti konvektívnej $\vec{v} \cdot \nabla \vec{u}$. Keďže ide o malé vlny, môžeme konvektívnu časť rýchlosti zanedbať bez vplyvu na správnosť riešenia. Pre celkovú rýchlosť potom dostávame

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Triviálnou integráciou dostávame vzorce pre okamžitú výchylku

$$u_x = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\cosh ky}{\cosh kH} \sin(\omega t - kx),$$

$$u_y = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\sinh ky}{\cosh kH} \cos(\omega t - kx).$$

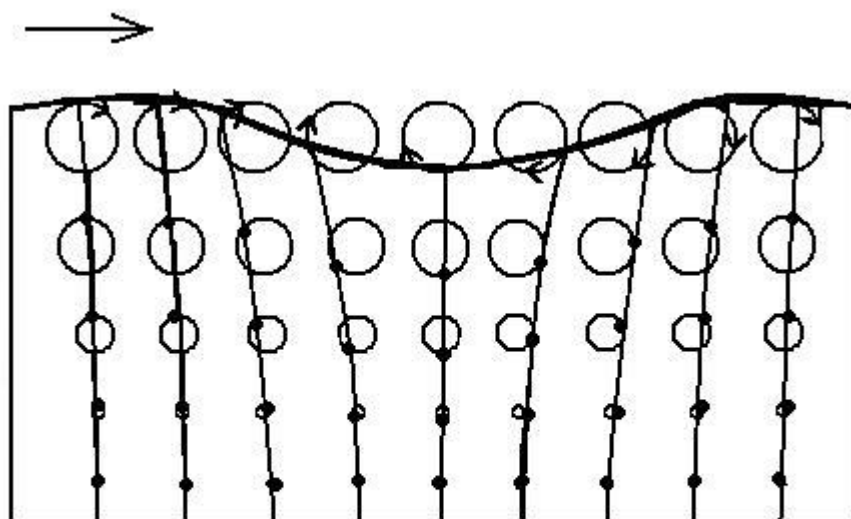
Z rovníc plynie parametrické vyjadrenie elipsy; u_x a u_y sú súradnice bodov, ktoré ležia na tejto elipse. A_x a A_y predstavujú poloosi tejto elipsy.

$$A_x = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\cosh ky}{\cosh kH},$$

$$A_y = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\sinh ky}{\cosh kH}.$$

Z tohto odvodu vyplýva, že vlny na vodnej hladine nie sú vlnami priečnymi ani vlnami pozdĺžnymi. Vidíme, že element vody vykonáva pravotočivý pohyb po elipse. Parametre elipsy sú rôzne podľa toho, či berieme do úvahy hlbokú alebo plytkú vodu a podľa toho, či sledujeme pohyb pri hladine alebo pri dne. Tieto rozdiely si popíšeme v samostatných kapitolách.

Pohyb elementu kvapaliny je teda možné charakterizovať pojmom periodický. Za jednu periódu vykoná element jednu otočku po elipse a vráti sa do svojej pôvodnej polohy, z čoho vidíme, že nastáva len prenos energie vlny po hladine a nie samotný presun kvapaliny. Ďalej môžeme vyvodit' záver, že ak sa element kvapaliny pohybuje všeobecne po elipsách, tak je tvar vodnej hladiny daný trochoidou, čo je zjavné z toho, že ide o odvaľovanie elipsy po priamke (pohyb v smere osi x). Na obrázku (Obr. 2.2) je znázornený tvar vlny na hlbokkej vode kedy je trajektória elementu vody kruhová



Obr.2.2. Tvar vlny spôsobený kruhovým pohybom elementu vody

3 Vlny na hlbkej vode

Ako je z názvu jasné, zaoberáme sa hlbokou vodou pre ktorú platí, že hĺbka vody je mnohonásobne väčšia ako vlnová dĺžka vln šíriacich sa na nej. Z toho ale vyplýva, že podiel $\frac{H}{\lambda}$ sa blíži nekonečnu. Využitím vzťahu pre vlnové číslo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

dostávame

$$kH = 2\pi \frac{H}{\lambda},$$

kde výraz kH taktiež rastie do nekonečna, keďže ide len o pre násobenie pôvodného podielu konečnou konštantou. Z tohto poznatku ale môžeme vidieť, že pre vlny na hlbkej vode je nutné upraviť disperznú reláciu. V pôvodnom vzťahu

$$\omega^2 = gk \tanh kH,$$

vidíme výraz kH v argumente funkcie hyperbolického tangensu. Z vlastností tejto funkcie vieme že pre x idúce do nekonečna je $\tanh x \approx 1$ a teda aj pre náš prípad platí $\tanh kH \approx 1$. Týmto dostávame nový vzťah pre disperznú reláciu

$$\omega^2 = gk.$$

Po odmocnení a dosadení vlnového čísla dostávame

$$\omega = \sqrt{\frac{g2\pi}{\lambda}}.$$

Taktiež sa mení aj grupová rýchlosť. Dosadením predpokladu že kH ide k nekonečnu do pôvodného výrazu dostávame

$$a = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh kH \left(\frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh 2kH} \right),$$

$$a_1 = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot 1 \left(\frac{1}{2} + 0 \right),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Označme fázovú rýchlosť šírenia vln na hlbkej vode ako c_1 . Pre c_1 platí

$$c_1 = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Z výsledkov pozorujeme, že $a_1 = \frac{1}{2}c_1$, teda grupová rýchlosť je polovičná oproti fázovej.

Ako vidíme, fázová aj grupová rýchlosť vln na hlbkej vode priamoúmerne závisí na vlnovej dĺžke a to konkrétne na jej druhej odmocnine. To znamená, že vlny s väčšou vlnovou dĺžkou sa šíria rýchlejšie, čo nazývame normálnou disperziou.

Zaujímavé je tiež sledovať tvar trajektórií pohybu elementu kvapaliny. V predchádzajúcej časti sme spomenuli, že tvar trajektórií závisí na hĺbke vody a na tom, či sledujeme oblasť hladiny alebo oblasť dna. Odvodili sme si vzťahy pre polohu elementu kvapaliny

$$u_x = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\cosh ky}{\cosh kH} \sin(\omega t - kx),$$

$$u_y = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\sinh ky}{\cosh kH} \cos(\omega t - kx).$$

Aj naďalej uvažujeme, že kH ide k nekonečnu a taktiež, že ky ide k nekonečnu. Za tohto predpokladu je $\frac{kg}{\omega^2} = 1$. Z vlastností hyperbolických funkcií vieme, že pre rastúce x je $\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2}e^x$. Dosadením dostávame

$$u_x = -A \frac{\frac{1}{2}e^{ky}}{\frac{1}{2}e^{kH}} \sin(\omega t - kx), \quad u_y = -A \frac{\frac{1}{2}e^{ky}}{\frac{1}{2}e^{kH}} \cos(\omega t - kx),$$

$$u_x = -Ae^{k(y-H)} \sin(\omega t - kx), \quad u_y = -Ae^{k(y-H)} \cos(\omega t - kx).$$

Toto sú parametrické rovnice kružnice, a teda trajektórie elementu vody sú na hlbkej vode kruhové. Z rovníc vyplýva, že kruhová dráha je aj v oblasti dna, aj v oblasti hladiny. S hĺbkou je však polomer exponenciálne menší. To znamená, že už v malej hĺbke je pohyb elementu utlmený.

4 Vlny na plytkej vode

Ide o vlny na vode, kde je hĺbka podstatne menšia ako vlnová dĺžka. Opäť sa pokúsime vyjadriť disperznú reláciu a z nej fázovú a grupovú rýchlosť. Zavedieme aproximáciu, kde $\frac{H}{\lambda}$ sa blíži k nule, keďže je vlnová dĺžka mnohonásobne väčšia ako hĺbka. Podobne ako sa pri vlnách na hlbkej vode blížil člen kH k nekonečnu, blíži sa teraz tento člen k nule. Z vlastností hyperbolických funkcií vieme, že

$$\cosh x \approx 1,$$

$$\sinh x \approx \operatorname{tgh} x \approx x,$$

pre x idúce k nule. Teda tiež

$$\cosh kH \approx 1,$$

$$\sinh kH \approx \operatorname{tgh} kH \approx kH,$$

pre kH idúce k nule. Dosadením do všeobecného vzťahu pre disperznú reláciu dostávame

$$\omega^2 = gk^2H,$$

$$\omega = k\sqrt{gH}.$$

Môžeme vyvodit' zaujímavý záver a to, že rýchlosť vln na plytkej vode vôbec nezávisí na vlnovej dĺžke, avšak závisí na hĺbke vody. Tieto vlny sa nazývajú Lagrangeove vlny.

Pre grupovú rýchlosť platí vzťah

$$a = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{tgh} kH} \left(\frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh 2kH} \right)$$

a po dosadení našich predpokladov dostávame

$$a_2 = \sqrt{\frac{g}{k} \sinh kH} \left(\frac{1}{2} + \frac{kH}{2kH} \right),$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{g}{k} kH} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$a_2 = \sqrt{gH}.$$

Označme fázovú rýchlosť šírenia vln na plytkej vode ako c_2 . Pre c_2 platí

$$c_2 = \frac{\omega}{k} = \frac{k\sqrt{gH}}{k} = \sqrt{gH}.$$

Z výsledkov vidíme, že v prípade plytkej vody je grupová a fázová rýchlosť rovnaká.

Rovnako ako v prípade hlbkej vody sa pokúsime zistiť tvar trajektórií. Pripomínáme, že v prípade hlbkej vody boli trajektórie kruhové. Postupovať budeme podobne ako v minulej kapitole. Do rovníc pre polohu elementu dosadíme naše predpoklady plynúce z aproximácie pre vlny na plytkej vode.

$$u_x = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\cosh ky}{\cosh kH} \sin(\omega t - kx),$$

$$u_y = -\frac{kg}{\omega^2} A \frac{\sinh ky}{\cosh kH} \cos(\omega t - kx).$$

Predpoklady sú $\cosh kH \approx 1$ a $\sinh kH \approx \tanh kH \approx kH$.

$$u_x = -\frac{kg}{k^2 gH} A \frac{1}{1} \sin(\omega t - kx), \quad u_y = -\frac{kg}{k^2 gH} A \frac{ky}{1} \cos(\omega t - kx),$$

$$u_x = -\frac{1}{k} \frac{A}{H} \sin(\omega t - kx), \quad u_y = -y \frac{A}{H} \cos(\omega t - kx).$$

Opäť dostávame parametrické rovnice, ale tentokrát vidíme, že neide o kruhovú trajektóriu. Z rovnice pre x -ovú amplitúdu elementu vidíme, že táto poloha sa s hĺbkou nemení, tj. nezávisí na aktuálnej hĺbke y . Amplitúda v smere osi y závisí na y , a teda je premenlivá s hĺbkou. Pre rôzne hĺbky následne dostávame rôzne rovnice elíps. Pre veľké vlnové dĺžky charakteristické pre vlny na plytkej vode prichádzame k záveru, že na hladine je amplitúda v smere osi x podstatne väčšia ako amplitúda v smere osi y . Tým pádom hovoríme o pozdĺžnych vlnách. Na dne prejdú trajektórie elementu vody do priamok rovnobežných s osou x .

5 Konkrétne vlny

V tejto kapitole sa budeme zaoberať konkrétnymi príkladmi vln na hladine. Z vln na hlbokkej vode to budú predovšetkým vlny vyvolané vetrom na hladine, odkiaľ plynie tiež názov v angličtine „wind waves“, ktorým sa zamieňa pojem „deep-water waves“. V súvislosti s touto problematikou si vysvetlíme ako funguje odhad vzdialenosti búrky na mori. Druhá časť bude patriť vlnám na plytkkej vode. Keďže vlny narážajú na pobrežie kde sa hĺbka vody blíži k nule, do tejto časti budú patriť práve vlny na pobreží. Tiež sem patria príliv, odliv, tsunami a solitárna vlna ako si ukážeme v každom konkrétnom prípade.

5.1 Konkrétne vlny na hlbokkej vode

Gravitačné vlny sú charakteristické tým, že sily, ktoré sa snažia dostať vychýlenú vodnú hladinu do rovnovážnej polohy, sú práve gravitačné sily. To ale nehovorí nič o vzniku vln a faktoroch pôsobiach na ich výsledné vlastnosti. Ku vzniku vlny je potrebné na hladinu pôsobiť silou. Pod touto silou si môžeme predstaviť pôsobenie vetra na vodnú hladinu, vhadenie predmetu do vody alebo pohyb telesa na vodnej hladine. Vo všetkých týchto prípadoch dochádza k vytvoreniu vln s malou vlnovou dĺžkou vo vzťahu k hĺbke vody na ktorej vznikajú, ak berieme do úvahy vlny na mori alebo oceáne. Preto pre tieto vlny využívame pojem „vlny na hlbokkej vode“. Práve vlny spôsobené vetrom tvoria ich prevažnú časť.

5.1.1 Vlny a vietor

Ako sme si ukázali v odvodzovacej časti, uhlová frekvencia a teda aj fázová rýchlosť závisia na vlnovej dĺžke. To popisujú vzťahy

$$\omega = \sqrt{\frac{g2\pi}{\lambda}},$$
$$c_1 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Čím väčší vietor nad hladinou pozorujeme, tým väčšia sila na hladinu pôsobí. Hladine je predávaná väčšia energia a tým sa vytvárajú vlny s väčšou vlnovou dĺžkou. Z predchádzajúcich vzťahov plyní tiež vyššia fázová rýchlosť. Medzi rýchlosťou vetra a nadobudnutou rýchlosťou vlny je určité oneskorenie. Vietor musí viať určitý čas, aby rýchlosť šírenia vlny dosiahla rýchlosť vetra. Ak predpokladáme vyrovnanie týchto rýchlostí a rýchlosť vetra označíme ako c_v , potom je vlnová dĺžka rovná

$$\lambda = \frac{2\pi c_v^2}{g}.$$

Ako sa uvádza v [2], pri hurikánoch môže dochádzať k vytvoreniu vln s vlnovou dĺžkou až okolo 500 metrov, čo je relatívne veľká vlnová dĺžka. V porovnaní s priemernou hĺbkou oceánu ($H_0 = 4000 \text{ m}$) je to ale stále niekoľkonásobne menšia hodnota, a teda sa stále pohybujeme v oblasti vln na hlbokkej vode. Podľa [2] je amplitúda vln spôsobených vetrom asi 30-krát menšia ako ich vlnová dĺžka. Pri hurikánoch výška vlny dosahuje okolo 18 metrov, v extrémnych prípadoch 30 metrov.

Zaujímavou aplikáciou je možnosť zistiť vzdialenosť búrky, ktorá vlny vyvolala, od pobrežia. Veličinou, ktorú môžeme jednoducho merať je perióda vlny a jej zmena za čas. Označme periódu ako T a $\frac{dT}{dt}$ je potom jej časová zmena. Ďalej označme vzdialenosť búrky ako L . Pre periódu platí

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{g}{k}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

Čas, za ktorý dorazí vlna na breh je rovný

$$t = \frac{L}{c} = \frac{LT}{\lambda}.$$

Vyjadrením λ z predchádzajúcej rovnice a dosadením do rovnice pre periódu T dostávame

$$T = \sqrt{\frac{2\pi LT}{gt}},$$

$$T^2 = \frac{2\pi LT}{gt},$$

$$T = \frac{2\pi L}{gt}.$$

Môžeme merať tiež časovú zmenu periódy. Tú dostávame časovou deriváciou predchádzajúceho vzťahu

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi L}{gt^2}.$$

Vylúčením parametru času z prechádzajúcich vzťahov a po úprave dostávame výraz pre vzdialenosť búrky

$$L = -\frac{gT^2}{2\pi \frac{dT}{dt}}.$$

Ukázali sme si jednoduchý postup ako vypočítať vzdialenosť búrky a tým pádom aj možnosť vypočítať kedy búrka začala.

5.2 Konkrétne vlny na plytkej vode

Medzi vlny na plytkej vode patria tsunami, príliv a odliv, pobrežné vlny a solitárne vlny nazývané tiež solitony. Na vytvorenie vln na plytkej vode, kedy je vlnová dĺžka podstatne väčšia ako hĺbka vody, majú vplyv iné sily ako v prípade vln na hlbkej vode. Nebezpečné vlny tsunami vznikajú pôsobením podmorskej seizmickej aktivity. Na vznik prílivu a odlivu majú vplyv slapové sily Slnka a Mesiaca (predovšetkým Mesiaca). Pobrežné vlny radíme k vlnám na plytkej vode v súvislosti s prechodom vln z väčších hĺbok do oblasti pobrežia, kde je nakoniec hĺbka nulová. Napríklad vlna, ktorá mala podstatne menšiu vlnovú

dĺžku ako bola hĺbka mora, môže na pobreží dosahovať porovnateľné hodnoty týchto veličín. Rozdiel oproti tsunami je ten, že tsunami pokladáme za vlnu na plytkej vode už na otvorenom oceáne. Solitárna vlna je spôsobená napríklad vhozením predmetu do vody alebo pohybom telesa po hladine na vodách s malou hĺbkou. Medzi takéto prostredia patria napríklad plytké vodné kanály. Teraz si popíšeme jednotlivé vlny.

5.2.1 Tsunami

Tsunami patria medzi najnebezpečnejšie vlny aké poznáme. Platí pre ne aproximácia vĺn na plytkej vode a to z dôvodu, že tieto vlny majú vlnovú dĺžku v rádoch stoviek kilometrov. V porovnaní s priemernou hĺbkou dna $H_0 = 4 \text{ km}$ je to podstatný rozdiel. Disperzná relácia je vyjadrená odvodeným vzťahom

$$\omega^2 = gk^2H$$

a pre fázovú rýchlosť platí

$$c_2 = \sqrt{gH}.$$

Tu je potrebné si znovu uvedomiť, že rýchlosť vlny nezávisí na jej vlnovej dĺžke, ale na hĺbke vody. Ak za hĺbku vody vezmeme priemernú hĺbku oceánu a pripustíme, že sa počas šírenia vlny nemení, potom rýchlosť vlny dosahuje hodnotu až 200 m s^{-1} počas celej doby jej šírenia.

Zoznámili sme sa s vlnovou dĺžkou a rýchlosťou tsunami a teraz sa pozrieme na jej amplitúdu. Amplitúda u vĺn tsunami na otvorenom oceáne nie je veľká, podľa [3] nepresahuje 1 meter. Problém nastáva, až keď vlna dorazí k pobrežiu. Zo vzťahu jasne vyplýva, že keď sa zmenšuje hĺbka, klesá aj rýchlosť vlny. Vlna má ale aj tak veľkú kinetickú energiu, ktorá pri náraze na pobrežie nemá byť kde obsiahnutá. Mení sa preto na potenciálnu energiu, čoho dôsledkom je nárast amplitúdy. Keď si uvedomíme fakty, že veľká vlnová dĺžka a veľká rýchlosť spôsobujú veľkú periódu, a pridáme k tomu nárast amplitúdy na pobreží, je jasné, prečo je tsunami nebezpečná. Na rozdiel od vysokých pomalých vĺn, ktoré sa ihneď lámu, tsunami so sebou prináša masu vody, ktorá zaplaví pobrežie na dlhší čas. Vďaka veľkej perióde môže trvať niekoľko desiatok minút, kým táto vlna odznie.

Nebezpečenstvo prirodzene plyní aj z veľkej rýchlosti šírenia tsunami, a teda krátkeho času na informovanie o blížiaci sa vlne. Tento čas závisí aj od toho, v akej fáze dorazí vlna na pobrežie. Prvá možnosť je, že dorazí v štádiu kedy dosahuje amplitúda svoje maximum v smere osi y . Vtedy je čas kratší a vlna nečakannejšia. Ak dorazí tsunami vo fáze kedy amplitúda dosahuje maximálne záporné hodnoty, je možné pozorovať výrazný pokles hladiny na pobreží, čo je znakom, že za pol periódy dosiahne vlna maximálnu amplitúdu v kladnom smere. Tento čas sa môže pohybovať okolo 30 minút podľa typu vlny, čo je pomerne dosť času na opustenie priestoru zaplavenia.

Podrobný popis a vysvetlenie je uvedené na príklade vlny tsunami z roku 2004 v [3].

5.2.2 Príliv a odliv

Príliv a odliv sú spôsobené slapovými silami Slnka a Mesiaca. Vzájomné postavenie Slnka, Mesiaca a Zeme vytvára rôzne druhy prílivov a odlivov. Príliv a odliv sa dá charakterizovať jediným pojmom „periodická prílivová vlna“, pričom perióda je daná zemskou rotáciou. Táto vlna má amplitúdu danú vzťahom, ktorý je uvedený v [2].

$$A_V = A_M \cos 2\theta_M + A_S \cos 2\theta_S,$$

kde A_V je výsledná amplitúda a A_M a A_S sú amplitúdy vlny spôsobené Mesiacom a Slnkom. Premenné θ_M a θ_S označujú uhlové vzdialenosti od zenitu. Označme si indexy prislúchajúce k jednotlivým pojmom: Zem-Z, Mesiac-M, Slnko-S. Ďalej si označme hmotnosť ako m , vzdialenosť od Zeme ako d a polomer ako r . Amplitúdy vlny vyvolané Mesiacom a Slnkom sú potom podľa [2] rovné

$$A_M \approx \frac{3m_M r_Z^4}{4d_M^3 m_Z}, \quad A_S \approx \frac{3m_S r_Z^4}{4d_S^3 m_Z}.$$

Vidíme, že výsledná amplitúda je ovplyvnená aj Slnkom, aj Mesiacom. Jej maximum nastáva v prípade určitej vzájomnej polohy Zeme, Slnka a Mesiaca. Príliv s maximálnou amplitúdou sa nazýva skočný. Na druhej strane poznáme príliv hluchý, ktorý nastáva vzájomným vyrušením pôsobenia Slnka a Mesia. Polohy sú znázornené na obrázku (Obr. 5.1).

Pre vlny na plytkej vode platí pre nás už známy vzťah pre disperznú reláciu

$$\omega = k\sqrt{gH} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{gH}.$$

Vyjadrením vlnovej dĺžky z predchádzajúceho vzťahu dostávame

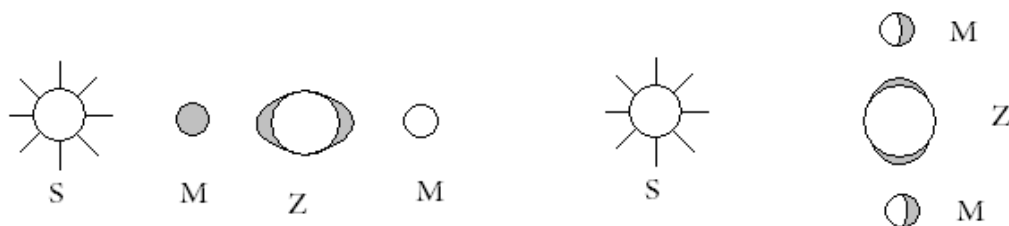
$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{gH} = T\sqrt{gH}.$$

Vieme, že príliv nastáva každých 12 hodín a je spôsobený predovšetkým mesačnými slapmi. Keď túto periódu dosadíme do vzťahu pre vlnovú dĺžku spolu s priemernou hĺbkou oceánu $H_0 = 4 \text{ km}$, dostávame vlnovú dĺžku prílivovej vlny $\lambda = 9000 \text{ km}$, čo je ešte niekoľkonásobne viac ako u vĺn tsunami. Odtiaľ vidíme, že naše zaradenie prílivu a odlivu medzi vlny na plytkej vode bolo správne.

Zaujímavým javom, ktorý môže nastať, je rezonancia. Pod rezonanciou rozumieme skladanie protichodných vĺn rovnakej frekvencie. Teoreticky by tento jav mohol nastať, keby boli všetky oceány voľne prepojené. To však nie je v skutočnosti možné. Avšak rezonancia nastáva v určitých prípadoch v zálivoch. Nutnou podmienkou je, aby platilo

$$L \approx \frac{1}{4}\lambda,$$

pretože práve vtedy dochádza k tomu, že sa na konci zálivu tvorí uzol kmitania a na vstupe do zálivu sa tvorí kmitňa, v ktorej dochádza k vytváraniu veľkých amplitúd. Príklad takejto vlny v zálive Fundy je uvedený v [2] a ďalšie zálivy sú uvedené v [4]. Podrobnejší popis prílivových vĺn sa nachádza v [7].



Obr. 5.1 Poloha Mesica a Slnka pri skočnom a hluchom prílive

5.2.3 Pobrežné vlny

Pobrežné vlny môžu byť spočiatku vlny na hlbokkej vode, ktoré dorazili až k pobrežiu, kde menia svoj charakter na vlny na plytkej vode, práve v dôsledku radikálnej zmeny hĺbky dna. Zatiaľ čo má vlna na otvorenom oceáne malú vlnovú dĺžku oproti hĺbke, postupným približovaním sa stáva vlnová dĺžka porovnateľnou s hĺbkou, až je nakoniec možné tieto vlny aproximovať výrazom „vlny na plytkej vode“.

Pobrežné vlny majú rovnaký charakter ako vlny tsunami, s tým rozdielom, že ich vlnová dĺžka v absolútnom zmysle je malá. Vlna nemá veľkú rýchlosť, teda ani kinetickú energiu, tým pádom ani takú silu ako tsunami. Keďže perióda závisí na vlnovej dĺžke a naopak

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{gH} = T \sqrt{gH}$$

a vlnová dĺžka je malá, nehrozí zaplavenie pobrežia ako v prípade tsunami. Vlny sa na pobreží lámu v dôsledku ich výšky alebo malej hĺbky vody. Tieto vlny majú nakoniec nelineárny charakter a známym dôsledkom je predbiehanie hrebeňa vlny, až kým nedôjde k jej zrúteniu.

Znáмым fenoménom je kolmý dopad vln na pobrežie. Tento jav nastáva vždy, aj v prípade kedy vlna putuje k pobrežiu pod ostrým uhlom. Príčinou tohto javu je jednoduchá skutočnosť. Tá časť putujúcej vlny, ktorá je bližšie k pobrežiu, narazí skôr na stúpajúce dno a zákonite stratí rýchlosť, zatiaľ čo vzdialenejšia časť vlny putuje ešte pôvodnou rýchlosťou. Bližšia časť spomalí natoľko, že ju vzdialenejšia časť dobehne. Takto sa vlny stáčajú, až kým nedopadajú kolmo na pobrežie. Podrobné vysvetlenie sa uvádza v [3].

5.2.4 Solitárne vlny

Solitárne vlny sú zvláštnym príkladom vln na plytkej vode. Na úvod si uveďme zopár faktov. Na plytkej vode disperzná relácia nezávisí na vlnovej dĺžke. Závisí len na hĺbke, ktorá je v tomto prípade malá, obzvlášť ak uvažujeme o veľmi plytkom kanáli. Aj napriek tomu vlna javí známky disperzie a má snahu sa relatívne rýchlo rozplývať, čo znamená že sa rozširuje.

Avšak jav, ktorý môžeme na plytkom kanáli pozorovať, nenaznačuje žiadne známky disperzie. Táto vlna má tendenciu postupovať dlhú dobu kým sa rozplynie a nazýva sa soliton. Problém, o ktorom sme v tejto súvislosti neuvažovali je, že už neide o malé vlny, ale o vlny konečnej amplitúdy, pri ktorých sa prejavujú jej nelineárne účinky presne ako pri pobrežných vlnách, kedy sa amplitúda zväčšuje. Pri vytvorení vhodných podmienok je možné pozorovať vyrušenie disperzie a nelinearity, v dôsledku čoho sa z vlny stáva vcelku stabilný útvar, ktorý sa šíri po dlhú dobu.

Rovnica, ktorá popisuje túto vlnu sa nazýva „Korteweg – de Vriesova“ rovnica. Teraz si ukážeme jej tvar a stručne popíšeme jej riešenie.

Rovnica má tvar

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3u}{2H} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

kde u je výchylka nelineárnej vlny, t je čas a $c_0 = \sqrt{gH}$ je rýchlosť malých vln. Tretí a štvrtý člen „Korteweg – de Vriesovej“ rovnice označuje disperznú korekciu a korekciu nelinearity.

Riešenie tejto rovnice sa hľadá v tvare obmedzenej postupnej vlny

$$u = f(x - ct),$$

ktorý dosadíme do „Korteweg – de Vriesovej“ rovnice a dostávame

$$\left(1 - \frac{c}{c_0}\right)f' + \frac{H^2}{6}f''' + \frac{3}{2H}ff' = 0,$$

kde $\varphi = x - ct$ značí transformovanú premennú. Po prvom zintegrovaní dostávame

$$\left(1 - \frac{c}{c_0}\right)f + \frac{H^2}{6}f'' + \frac{3}{4H}f^2 = C,$$

kde $C = 0$ pre podmienku neporušiteľnosti hladiny v nekonečne. Druhou integráciou dostávame

$$\left(1 - \frac{c}{c_0}\right)\frac{f^2}{2} + \frac{H^2}{12}f'^2 + \frac{1}{4H}f^3 = D,$$

kde analogicky $D = 0$. Po separácii a následnej integrácii dostávame vzorec pre výchylku nelineárnej „Korteweg – de Vriesovej“ vlny

$$u = A \operatorname{sech} \frac{x - ct}{L},$$

kde L je charakteristická šírka vlny a c je jej rýchlosť, pre ktoré platia vzorce

$$L = \sqrt{\frac{4H^3}{3A}}, \quad c = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{A}{2H}\right).$$

Na záver si uvedieme pár vlastností solitonov:

- čím väčšia je výška solitonu, tým je soliton užší,
- čím užší je soliton, tým je rýchlejší,
- pri strete dvoch za sebou idúcich solitonov s rôznymi výškami, rýchlejší prebehne pomalší a pohybujú sa stabilne ďalej bez narušenia či zmeny rozmerov.

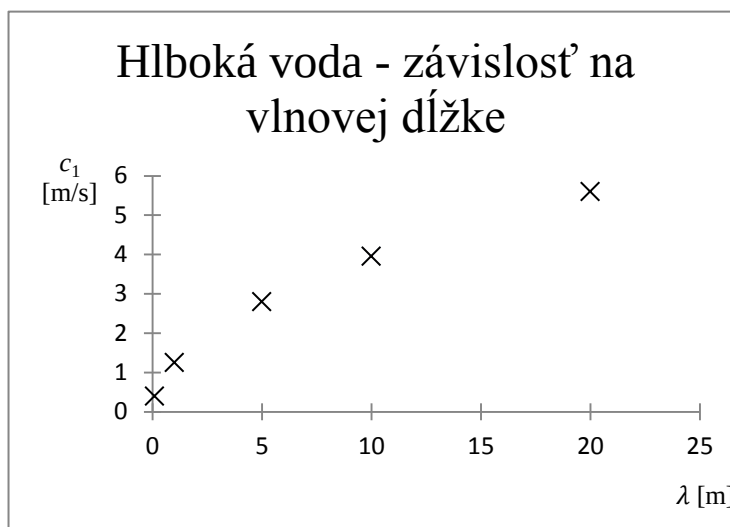
6 Porovnanie vln na hlbkej a plytkej vode

V tejto časti si ukážeme grafické závislosti rýchlostí vln na ich vlnových dĺžkach a hĺbkach. Z odvodených vzorcov zostrojíme pre konkrétne hodnoty vlnových dĺžok a hĺbok vody grafy závislostí pre oba typy vln.

Ako prvé popíšeme vlny na hlbkej vode. Prvá závislosť vyjadruje vzťah medzi fázovou rýchlosťou a vlnovou dĺžkou. Keďže sme vo vyjadrení dospeli k vzťahu kde rýchlosť závisí na druhej odmocnine vlnovej dĺžky, závislosť je vyjadrená grafom na Obr. 6.1. Použité hodnoty sú uvedené v Tab. 6.1.

Tab. 6.1

vlny na hlbkej vode	
konštantná hĺbka	
λ	c_1
[m]	[m/s]
0,1	0,395
1	1,249
5	2,794
10	3,952
20	5,589

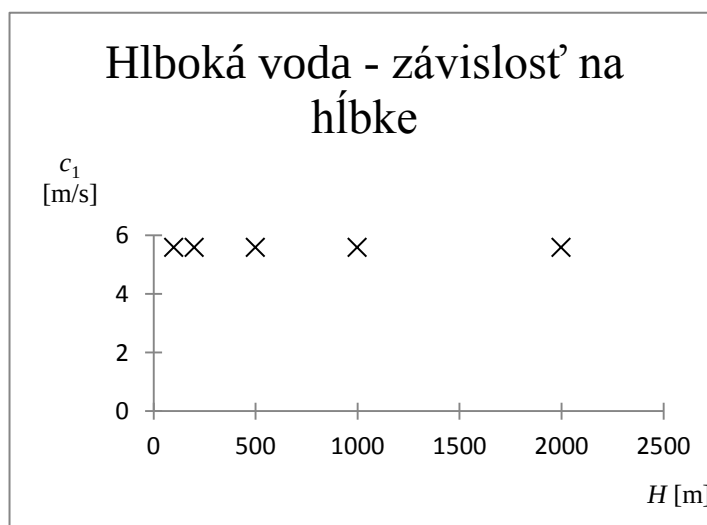


Obr. 6.1 Závislosť fáz. rýchlosti na vlnovej dĺžke – hlboká voda

Druhá závislosť vyjadruje skutočnosť, že pri vlnách na hlbkej vode fázová rýchlosť nezávisí na hĺbke. V tabuľke (Tab. 6.2) sú uvedené skúmané hĺbky. Táto závislosť je konštantná, ako plynie z odvodennej závislosti. Pre výpočet bola použitá vlnová dĺžka $\lambda = 20$ m.

Tab. 6.2

vlny na hlbkej vode	
konštantná vlnová dĺžka	
hlbka	c_2
[m]	[m/s]
100	5,589
200	5,589
500	5,589
1000	5,589
2000	5,589

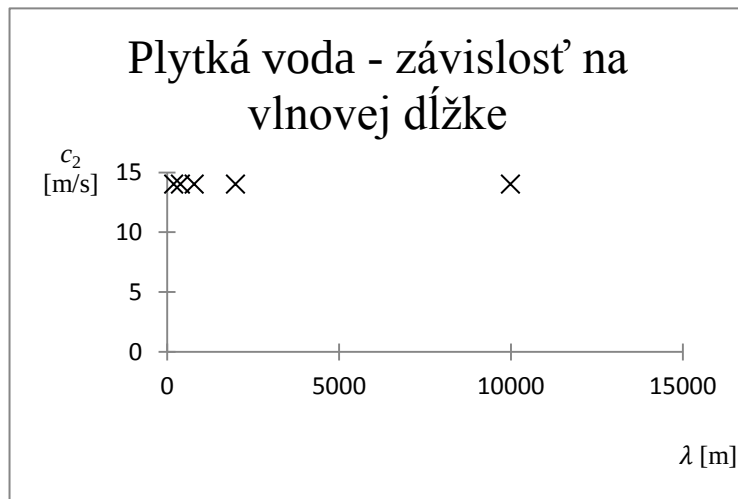


Obr. 6.2 Závislosť fáz. rýchlosti na hĺbke vody – hlboká voda

V ďalšej časti preskúmame rovnaké závislosti pre konkrétne hodnoty pri vlnách na plytkej vode. Zo vzorcov vyplýva, že vlny na plytkej vode nezávisia na vlnovej dĺžke, čo je vyjadrené konštantnou závislosťou na obrázku (Obr. 6.3). Pre výpočet bola použitá hĺbka vody $H = 20$ m.

Tab. 6.3

vlny na plytkej vode	
konštantná hĺbka	
λ	c_1
[m]	[m/s]
200	14,007
400	14,007
800	14,007
2000	14,007
10000	14,007

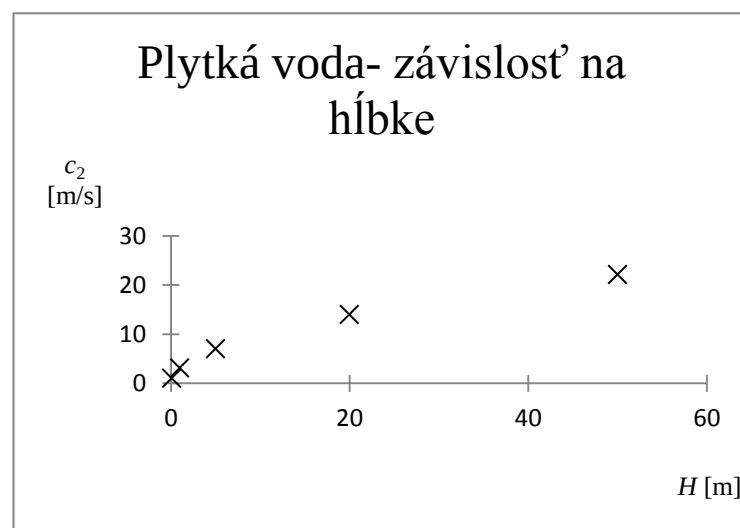


Obr. 6.3 Závislosť fáz. rýchlosti na vlnovej dĺžke – plytká voda

Posledným príkladom je závislosť fázovej rýchlosti na hĺbke vody. Zo vzorcov plynie priamoúmerná závislosť fázovej rýchlosti na druhej odmocnине hĺbky. Pre konkrétne hodnoty z tabuľky (Tab. 6.4) je graf závislosti na obrázku (Obr. 6.4).

Tab. 6.4

vlny na plytkej vode	
konštantná vlnová dĺžka	
hlbka	c_2
[m]	[m/s]
0,1	0,990
1	3,132
5	7,003
20	14,007
50	22,147



Obr. 6.4 Závislosť fáz. rýchlosti na hĺbke vody – plytká voda

V tejto kapitole sme si uviedli zrejmé grafické znázornenie jednotlivých závislostí.

7 Záver

V tejto práci sme sa zoznámili s pojmom vlny na hladine. Popísali sme si dva typy vln na hladine, a to vlny na hlbkej vode a vlny na plytkej vode.

Postupne sme si odvodili rovnice vln, zadefinovali okrajové podmienky a vysvetlili pojmy disperzná relácia, fázová rýchlosť, grupová rýchlosť a pohyb elementu vody.

U vln na hlbkej vode sme si odvodili vzťah pre disperznú reláciu, z ktorého vyplynulo, že rýchlosť šírenia vln, tzv. fázová rýchlosť, závisí na vlnovej dĺžke. Čím väčšia je vlnová dĺžka, tým väčšia je rýchlosť šírenia vln. Pohyb elementu bol v tomto prípade nájdený v tvare kružníc postupne tlmených s narastajúcou hĺbkou. Ukázali sme tiež, že grupová rýchlosť je polovičná oproti fázovej.

Naopak u vln na plytkej vode sme došli k záveru, že rýchlosť šírenia vln nezávisí na vlnovej dĺžke, ale na hĺbke vody pod šíriacou sa vlnou. Pohyb elementu je výraznejší vo vodorovnom smere a opisuje ploché elipsy, pričom na dne prechádzajú trajektórie do úsečiek. Tieto vlny majú charakter pozdĺžnych vln. Grupová rýchlosť týchto vln sa rovná fázovej rýchlosti.

V predposlednej kapitole sme podrobne rozoberali konkrétne príklady vln na hlbkej a plytkej vode, medzi ktoré patrili vlny vyvolané pôsobením vetra (vlny na hlbkej vode), vlny tsunami, pobrežné vlny, príliv a odliv, solitárne vlny (vlny na plytkej vode). Posledná kapitola obsahuje stručný prehľad numerických vyhodnotení jednotlivých závislostí fázových rýchlostí na vlnových dĺžkach a hĺbkach vody.

Okrajovo sme spomenuli nelineárne vlny v súvislosti so solitárnymi a pobrežnými vlnami. Týmto vlnami sa zaoberá samostatná teória. Samostatnú oblasť tiež tvorí využívanie energie vln. Ako je možné vidieť, do budúcnosti sa je čím zaoberať. Je možné študovať nadväzujúce teórie, skúmať praktické aplikácie a uskutočňovať experimenty.

Zoznam použitých zdrojov

- [1] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011, s. 630-669. Gerstner. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [2] BAJER, Jiří. *Mechanika 3*. 2. rozš. a dopl. vyd. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012, s. 503-531. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [3] BRAMALL, Nathan. SAN MATEO COUNTY COMMUNITY COLLEGE DISTRICT. *Water waves and tsunamis* [online]. 2007 [cit. 2013-05-20]. Dostupné z: <http://www.smccd.edu/accounts/bramalln/documents/waterwaves.pdf>
- [4] Príliv. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2013-3-10 [cit. 2013-05-21]. Dostupné z: <http://sk.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%ADliv>
- [5] SOCHA, Katherine. Circles in Circles: Creating a Mathematical Model of Surface Water Waves. In: *Http://mathdl.maa.org* [online]. 2007 [cit. 2013-05-21]. Dostupné z: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Ford/socha202.pdf
- [6] KROGSTAD, Harald E. a Øivind A. ARNTSEN. Linear Wave Theory: Regular waves. In: *Http://www.ntnu.no/* [online]. 2000 [cit. 2013-05-19]. Dostupné z: http://folk.ntnu.no/oivarn/hercules_ntnu/LWTcourse/lwt_new_2000_Part_A.pdf
- [7] Tide. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2013-5-22 [cit. 2013-05-23]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tide>