VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ZÁKLADY POHYBU VESMÍRNÝCH TĚLES

BASICS OF SPACE MOTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE MICHAL BAHNÍK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. TOMÁŠ KISELA, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Michal Bahník

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Základy pohybu vesmírných těles

v anglickém jazyce:

Basics of space motion

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavní náplní práce bude rozbor diferenciálních rovnic plynoucích z Newtonových pohybových zákonů a diskuze vlivu v nich obsažených parametrů na vlastnosti řešení. Zvláštní důraz pak bude věnován speciálním případům popsaným Keplerovými zákony a hledání kosmických rychlostí. Vyjma klasického problému dvou těles může být úloha zobecněna na tři či více těles s využitím elementárních numerických metod.

Cíle bakalářské práce:

1. Popis analytického řešení problému dvou těles.
2. Diskuze pojmu kosmické rychlosti vůči kvalitativním vlastnostem řešení.
3. Odvození Keplerových zákonů z diferenciálních rovnic.
4. Řešení problémů tří a více těles elementárními numerickými metodami.

Seznam odborné literatury:

Kalas, J., Ráb, M.: Obyčejné diferenciální rovnice, Brno, 1995.
Čermák, J., Ženíšek, A.: Matematika III, Brno, 2001.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 21.11.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c. Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce je přehledovým textem, který se zabývá problematikou pohybu vesmírných těles. Je rozebírán problém jednoho, dvou a tří těles. U prvních dvou úloh odvodíme analytický tvar trajektorie pohybu. Z čehož odvodíme Keplerovy zákony, které jsou základem pro pochopení pohybu vesmírných těles. Dále budeme diskutovat vztah trajektorie k pojmu kosmické rychlosti. Pro problém tří těles v obecném případě analytické řešení v uzavřeném tvaru neexistuje. Existují speciální případy, tzv. stabilní orbity, pro které je analytické řešení známo. Navrhneme tedy numerické řešení explicitní Runge-Kutta-Bogacki-Shampine metodou a metodou zpětného derivování a jejich výsledky otestujeme na příkladu stabilní orbit.

Abstract

This Bachelor thesis is a summarising text which deals with the issue of space motion. We analyse one-body, two-body and three-body problems. We derive analytical solution for the first two problems, from which we derive Kepler's laws, which are important for understanding of the space motion. We also discuss the relation of analytical solution to escape velocities. The closed form of analytical solution for general case of three-body problem does not exist. There are special cases, so-called stable orbits, for which the analytical solution is known. We design the numerical solution by explicit Runge-Kutta-Bogacki-Shampine method and back diferentiation method and we will test the results on the stable orbits.

Klíčová slova

Pohyb vesmírných těles, Kepler, probém dvou těles, problém tří těles

Key-words

Space motion, Kepler, two-body problem, three-body problem

BAHNÍK, M.: *Základy pohybu vesmírných těles*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Kisela, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Základy pohybu vesmírných těles* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Kisely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Michal Bahník

Děkuji svému školiteli Ing. Tomáši Kiselovi, Ph.D. za četné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Michal Bahník

Obsah

1 Úvod **7**

2 Teoretický základ **8**
2.1 Teorie obyčejných diferenciálních rovnic 8
2.2 Geometrie kuželoseček 11
2.3 Rychlost a zrychlení v polárních součadnicích 14
2.4 Fyzikální pozadí 16

3 Problém jednoho tělesa **18**
3.1 Odvození rovnice dráhy 18
3.2 Určení dráhy 19
3.3 Perioda eliptické dráhy 21

4 Problém dvou těles **22**
4.1 Vztah k problému jednoho tělesa 22
4.2 Kosmické rychlosti 25
4.3 Keplerovy zákony 26

5 Problém tří těles **28**
5.1 Stabilní orbity 28
5.2 Numerické řešení problému tří těles 28

6 Závěr **32**

1 Úvod

Průkopníky zkoumání pohybu vesmírných těles byli Johannes Kepler (1571 - 1630) a Galileo Galilei (1564 - 1642). Oba byli přesvědčenými zastánci heliocentrismu, tj. názoru, že planety obíhají kolem Slunce. Autorem tohoto modelu byl Mikuláš Koperník (1473 - 1543). Johannes Kepler se v roce 1596 stal matematickým spolupracovníkem astronoma Tychona Braheho a začal s ním pracovat na problému určit oběžnou dráhu planety Mars. V této práci pokračoval po Braheho smrti v roce 1601 sám. Po 8 letech ukázal, že Mars obíhá Slunce po eliptické dráze se Sluncem v jednom ohnisku. Tento zákon byl společně se „zákonem obsahů“ publikován v roce 1609. Kepler poté objevil podobné dráhy pro ostatní planety a svůj třetí zákon publikoval v roce 1619.

Galileo Galilei byl Keplerovým současníkem a pracoval nezávisle na něm. Je známý svým vynálezem dalekohledu zvětšujícím až dvacetinásobně, pomocí něhož pozoroval vesmírná tělesa. Objevil například některé měsíce planety Jupiter. Galileova práce o pohybech těles byla společně s Keplerovou prací předchůdcem klasické mechaniky, kterou vytvořil Isaac Newton o více než 100 let později. Newton také ukázal, že Keplerovy zákony plynou z jeho teorie gravitace.

V této práci se budeme věnovat analytickému řešení problému jednoho a dvou těles, které lze odvodit z Newtonových pohybových zákonů. Pomocí získaných výsledků odvodíme Keplerovy zákony a vzorce pro výpočet kosmických rychlostí. Na závěr provedeme diskusi problému tří těles.

Práce je členěna následovně. Ve druhé kapitole je uvedena potřebná teorie obyčejných diferenciálních rovnic, geometrie kuželoseček a potřebné fyzikální zákony, ze kterých v celé práci vycházíme. Ve třetí kapitole zkoumáme problém jednoho tělesa. V tomto případě uvažujeme jedno hmotné těleso upevněné v počátku soustavy souřadnic a jedno těleso zanedbatelné hmotnosti. Pomocí Newtonových zákonů a diferenciálních rovnic z nich plynoucích odvodíme, že nehmotné těleso se pohybuje kolem hmotného po kuželosečkách s ohniskem ve středu hmotného tělesa. Provedeme také výpočet kosmických rychlostí pomocí námi odvozených rovnic drah. Ve čtvrté kapitole zkoumáme problém dvou těles, což je případ vzájemného silového působení dvou těles srovnatelné hmotnosti. Jak se ukáže, tento problém lze převést na ekvivalentní problém jednoho tělesa a vyřešit stejně jako v prvním případě. V páté kapitole uvedeme významnou aplikaci získaných výsledků, odvození Keplerových zákonů. V šesté kapitole provedeme řešení problému tří těles. Tento problém v obecném případě nemá analytické řešení v uzavřeném tvaru. Proto jej budeme řešit numericky. Jsou však známy jisté speciální případy, takzvané stabilní orbity, kdy tento problém analyticky řešitelný je. Příklady stabilních orbit taktéž uvedeme. Vzhledem k zaměňování pojmů trajektorie a dráha se nyní k tomuto problému vyjádříme. V celé práci budeme používat pojem dráha pro křivku, po které se dané těleso pohybuje.

2 Teoretický základ

Než začneme zkoumat samotné pohyby vesmírných těles, zavedeme potřebný aparát, který budeme využívat. Budou to diferenciální rovnice, geometrie kuželoseček, protože jak se později ukáže, vesmírná tělesa se pohybují právě po nich. V poslední řadě uvedeme fyzikální zákony, ze kterých budeme vycházet. Uveďme nyní také, že vektory budeme značit tučným písmem, a skaláry netučným. Například $\boldsymbol{a}$ je vektor zrychlení, proto ho píšeme tučně. Velikost zrychlení $a = |\boldsymbol{a}|$ už je skalár, a proto ho tučně nepíšeme.

2.1 Teorie obyčejných diferenciálních rovnic

Při řešení problémů pohybu vesmírných těles vzniká potřeba řešit diferenciální rovnice v závislosti na počátečních podmínkách, tedy počáteční problém. Proto v této kapitole uvedeme potřebnou teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Uvedené definice a věty vycházejí z [4].

Definice 2.1. Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytují derivace hledané funkce jedné proměnné. Řádem diferenciální rovnice nazýváme nejvyšší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici. Obyčejnou diferenciální rovnici řádu n označujeme ODRn.

ODRn uvažujeme v normálním tvaru

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{2.1}$$

kde f je reálná funkce definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. V této práci ovšem budeme muset řešit diferenciální rovnici v závislosti na počátečních datech. Takové úloze se říká počáteční problém.

Definice 2.2. Počátečním problémem pro ODRn rozumíme nalézt řešení rovnice (2.1) vyhovující n počátečním podmínkám

$$\begin{aligned} y\left(x_0\right) &= y_0, \\ y'\left(x_0\right) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $[x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}] \in \Omega$.

Definice 2.3. Řešením ODRn nazýváme každou n-krát spojitě diferencovatelnou funkci na nějakém intervalu I, která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost. Křivku, která znázorňuje některé řešení dané ODR nazýváme **integrální křivkou** diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme také integrálem rovnice.

a) **Obecným řešením** ODRn rozumíme funkci závisející na n obecných konstantách $c_1, ..., c_n$ takových, že jejich vhodnou volbou lze získat řešení každého počátečního problému (2.1), (2.2).

b) **Partikulární řešení** ODRn je takové řešení, které získáme z obecného řešení pevnou volbou $c_1, ..., c_n$.

c) **Výjimečné (singulární) řešení** je takové řešení, které nezískáme z obecného řešení žádnou volbou $c_1, ..., c_n$.

Pro některé ODRn ovšem neexistují analytické metody pro nalezení řešení. Proto nyní uvedeme alespoň příslušné existenční věty.

Věta 2.1 (Picardova). *Nechť funkce $f = f(x, y_0, y_1, ...y_{n-1})$ splňuje tyto dvě podmínky*

1. *f je spojitá na Ω,*
2. *v oblasti Ω existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y_0}, ..., \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$,*

pak existuje řešení počátečního problému (2.1), (2.2), *které je definováno na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kde $\delta > 0$. Toto řešení je určeno jednoznačně.*

Věta 2.2 (Peanova). *Nechť funkce $f = f(x, y_0, y_1, ...y_{n-1})$ splňuje první podmínku Picardovy věty, pak existuje řešení počátečního problému* (2.1), (2.2) *které je definováno na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kde $\delta > 0$.*

Peanova věta zaručuje pouze existenci řešení, Picardova věta navíc i jeho jednoznačnost. Důkazy obou vět lze najít v [4].

Speciálním případem ODRn je lineární ODRn.

Definice 2.4. Obyčejnou diferenciální rovnici nazveme lineární, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i jejím derivacím.

Obecná lineární ODRn má tvar

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)\,,$$

kde $a_i(x)$ a $f(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Je-li $f \equiv 0$ na I, rovnici nazveme homogenní, jinak nehomogenní. Je-li $a_n(x) \neq 0$ na celém I, pak lze rovnici převést na normální tvar, což znamená explicitně vyjádřit $y^{(n)}$. Obecná homogenní lineární ODRn je tvaru

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0. \tag{2.3}$$

Nyní se vyjádříme ke struktuře řešení rovnice (2.3).

Věta 2.3. *Prostor všech řešení rovnice* (2.3) *tvoří vektorový prostor.*

Důkaz spočívá v ověření axiomů vektorového prostoru a lze ho najít například v [4]

Věta 2.4. *Nechť $y_1, ..., y_n$ jsou řešení* (2.3), *kde $a_n(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$, která jsou na I lineárně nezávislá (tvoří bázi prostoru řešení). Pak každé řešení* (2.3) *lze psát jednoznačně ve tvaru $y = c_1 y_1 + ... + c_n y_n$, kde $c_1, ..., c_n$ jsou vhodné konstanty závisející na y.*

Definice 2.5. Funkce $y_1, ..., y_n$ z předcházející věty nazýváme **fundamentálním systémem** řešení rovnice (2.3).

Speciálním případem homogenní lineární ODRn je homogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty. Je tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2.4}$$

kde $a_k,\ k = 0, ..., n$ jsou reálná čísla. Řešení (2.4) hledáme ve tvaru

$$y = e^{\lambda x}, \tag{2.5}$$

kde λ je neznámý parametr. Dosazením (2.5) do (2.4)

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0,$$

z čehož po vydělení výrazem $e^{\lambda x}$ dostáváme

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{2.6}$$

Hledaný parametr λ musí být kořenem algebraické rovnice (2.6) n-tého stupně. Nazveme ji **charakteristickou rovnicí**. Tato rovnice má obecně n komplexních kořenů včetně násobností.

Věta 2.5. *Obecné řešení $y(x)$ nehomogenní lineární ODRn lze psát ve tvaru $y = y_h + y_p$, kde y_h je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a y_p je nějaké(partikulární) řešení dané nehomogenní rovnice.*

Standardně se používají dvě metody pro hledání y_p . Jedna se nazývá **metoda variace konstant**, druhá je **metoda neurčitých koeficientů**. Popis obou metod lze nalézt například v [4].

2.2 Geometrie kuželoseček

Později uvidíme, že řešení odvozených rovnic vedou na polární rovnice kuželoseček. Proto je nyní vhodné zadefinovat, co to kuželosečky jsou a jaké mají vyjádření. Následující text vychází z [5].

Definice 2.6. Kuželosečka je rovinná křivka, která vznikne průnikem roviny s pláštěm rotační kuželové plochy. Rovina nesmí procházet vrcholem kuželové plochy.

Definice 2.6 připouští tři křivky nazývané **elipsa**, **hyperbola** a **parabola**.

Definice 2.7. Množina bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů E a F konstantní součet vzdáleností $2a$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) větší než vzdálenost $2e$ ($e \in \mathbb{R}, e > 0$) bodů E a F, se nazývá **elipsa** (viz obrázek 1).

Body E a F se nazývají ohniska elipsy a jejich poloviční vzdálenost e excentricita elipsy. Spojnice EF se nazývá hlavní osa a symetrála úsečky EF vedlejší osa elipsy. Střed S úsečky EF se nazývá střed elipsy. Číslo a se nazývá hlavní a číslo $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ vedlejší poloosa elipsy. Pro takto definovanou elipsu platí

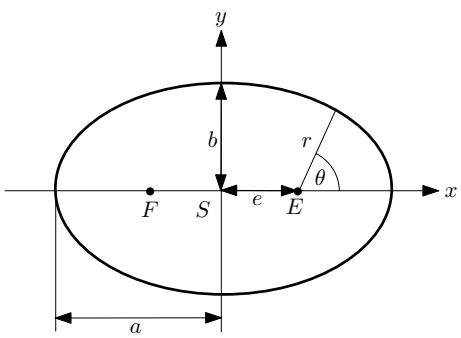
Věta 2.6. *V kartézském souřadnicovém systému, kde střed S elipsy je zároveň počátkem, hlavní osa elipsy je osou x a vedlejší osa elipsy je osou y má elipsa rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Excentricita e z předcházející definice se pak dá vyjádřit vztahem

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

a leží v intervalu $\langle 0, 1)$. Ve speciálním případě, kdy je excentricita rovna 0, přejde elipsa v kružnici.



Obrázek 1: Elipsa

Definice 2.8. Množina bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů E a F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $2a$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) menší než vzdálenost $2e$ ($e \in \mathbb{R}, e > 0$) bodů E a F, se nazývá **hyperbola** (viz obrázek 2).

Body E a F se nazývají ohniska elipsy a jejich poloviční vzdálenost e excentricita elipsy. Spojnice EF se nazývá hlavní osa a symetrála úsečky EF vedlejší osa hyperboly. Střed S úsečky EF se nazývá střed hyperboly. Číslo a se nazývá hlavní a číslo $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ vedlejší poloosa hyperboly. Pro takto definovanou hyperbolu platí

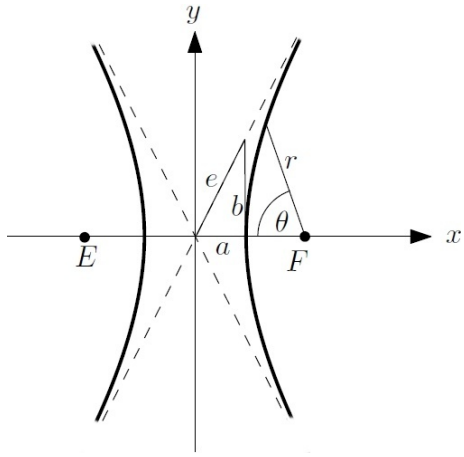
Věta 2.7. *V kartézském souřadnicovém systému, kde střed S hyperboly je zároveň počátkem, hlavní osa je osou x a vedlejší osa je osou y má hyperbola rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Excentricita e z předcházející definice se pak dá vyjádřit vztahem

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

a leží v intervalu $(1, \infty)$.



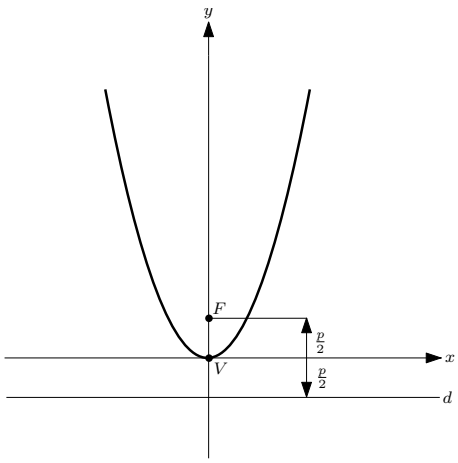
Obrázek 2: hyperbola

Definice 2.9. Množina bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky d, neprocházející bodem F, se nazývá **parabola** (viz obrázek 3)

Bod F se nazývá ohnisko paraboly a přímka d řídící přímka paraboly. Vzdálenost p, $(p \in \mathbb{R}, p > 0)$ ohniska od řídící přímky se nazývá parametr paraboly. Vrchol paraboly V je střed úsečky FK, kde K je průsečík osy paraboly s řídící přímkou. Pro takto definovanou parabolu platí

Věta 2.8. *V kartézském souřadnicovém systému, kde počátek je vrchol paraboly V, osa paraboly je osa y a osa x je kolmá na y a prochází bodem V, má parabola rovnici*

$$x^2 = 2py,$$



Obrázek 3: Parabola

Kuželosečky v polárních souřadnicích

Polární souřadnice r a θ jsou křivočaré souřadnice definované vztahy

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

Lze ukázat, že všechny výše uvedené kuželosečky lze v polárních souřadnicích r a θ zapsat souhrnným zápisem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta), \tag{2.7}$$

kde p je parametr paraboly a $p = \frac{b^2}{a}$ pro elipsu a hyperbolu. Pro různé hodnoty e dostaneme různé kuželosečky,

$$e \begin{cases} < 1 & \text{pro} \quad \textit{elipsu}, \\ = 1 & \text{pro} \quad \textit{parabolu}, \\ > 1 & \text{pro} \quad \textit{hyperbolu}\,. \end{cases}$$

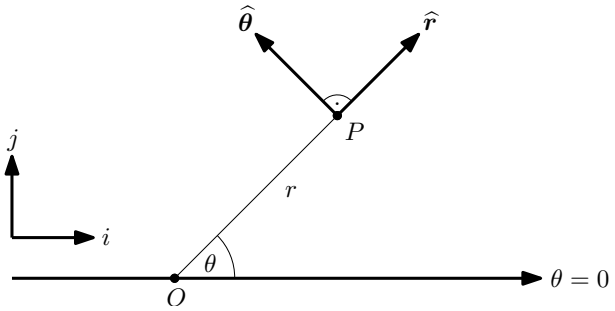
Odvození lze nalézt v [8].

2.3 Rychlost a zrychlení v polárních součadnicích

Pro zkoumání oběžných drah planet je velmi vhodné užít polární souřadnice r a θ. Obrázek 4 ukazuje polární souřadnice a polární jednotkové vektory $\widehat{\boldsymbol{r}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ bodu P. Při pohybu P vektory $\widehat{\boldsymbol{r}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ nezůstávají konstantní. Mají konstantní jednotkovou velikost, ale jejich směr závisí na polární souřadnici θ(je však nezávislý na souřadnici $\boldsymbol{r}$). Směry vektorů $\widehat{\boldsymbol{r}}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ se nazývají **radiální**, resp. **tangenciální**. Nyní vyjádříme derivace $\frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}$ a $\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{d\theta}$. Tyto derivace budou potřebné pro vyjádření rychlosti a zrychlení bodu P v polárních souřadnicích. Nejdříve vyjádříme $\widehat{\boldsymbol{r}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ pomocí kartézských bázových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Dostáváme

$$\widehat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}, \tag{2.8}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}. \tag{2.9}$$



Obrázek 4: Polární souřadnice r a θ bodu P a jeho polární jednotkové vektory $\widehat{\boldsymbol{r}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$

Derivace (2.8) a (2.9) podle θ dávají

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{d\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.10}$$

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\widehat{\boldsymbol{r}}. \tag{2.11}$$

Předpokládejme nyní, že P je bod pohybující se v rovině s polárními souřadnicemi r a θ, které jsou funkcemi času t. Polohový vektor P vzhledem k počátku O má směr $\widehat{\boldsymbol{r}}$ a velikost $|OP| = r$. Můžeme psát

$$\boldsymbol{r} = r\widehat{\boldsymbol{r}} \tag{2.12}$$

Abychom získali vyjádření rychlosti $\boldsymbol{v}$ v polárních souřadnicích, musíme derivovat vztah (2.12) podle času t, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(r\widehat{\boldsymbol{r}}\right) \\ &= \left(\frac{dr}{dt}\right)\widehat{\boldsymbol{r}} + r\left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right) \\ &= \dot{r}\widehat{\boldsymbol{r}} + r\left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nyní uvažujme, že $\widehat{\boldsymbol{r}}$ je fukcí θ, což je funkcí t. Podle pravidla o derivování složené funkce a výrazů (2.10), (2.11) dostáváme

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta} = \dot{\theta}\widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

Dosazením do (2.13) získáváme vyjádření rychlosti

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\widehat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\widehat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.14}$$

Rovnice (2.14) je vyjádření rychlosti $\boldsymbol{v}$ v polárních souřadnicích. Abychom vyjádřili zrychlení $\boldsymbol{a}$, musíme výraz (2.14) derivovat opět podle času t. Podobnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\widehat{\boldsymbol{r}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\left(r\dot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \ddot{r}\widehat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \left(r\dot{\theta}\right)\frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \\
&= \ddot{r}\widehat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \left(r\ddot{\theta}\right)\left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) \\
&= \ddot{r}\widehat{\boldsymbol{r}} + \left(\dot{r}\dot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \left(r\dot{\theta}^2\right)\widehat{\boldsymbol{r}} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\widehat{\boldsymbol{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}.
\end{aligned}$$

Pokud se částice pohybuje v rovině s polárními souřadnicemi r a θ, je tedy její zrychlení

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\widehat{\boldsymbol{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.15}$$

Jednotlivé členy výrazu (2.15) se nazývají Eulerovo zrychlení ($r\ddot{\theta}$), Coriolisovo zrychlení ($2\dot{r}\dot{\theta}$) a dostředivé zrychlení ($r\dot{\theta}^2$).

Rychlost a zrychlení v polárních souřadnicích byly odvozeny standardním postupem, který lze nalézt například v [1].

2.4 Fyzikální pozadí

Nyní si uvedeme fyzikální zákony, ze kterých budeme vycházet při zkoumání pohybu vesmírných těles. Znění všech zákonů včetně jejich ilustrace na příkladech lze najít v [2].

Newtonův zákon síly

Zrychlení tělesa je přímo úměrné síle působící na těleso a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Tento zákon se často zapisuje následujícím vztahem

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{2.16}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je vektor síly, $\boldsymbol{a}$ je vektor zrychlení a m je hmotnost tělesa.

Zákon akce a reakce

Působí-li jedno těleso na druhé silou, působí i druhé těleso na první silou o stejné velikosti a opačné orientaci, tj.

$$\boldsymbol{F_{12}} = -\boldsymbol{F_{21}}. \tag{2.17}$$

Newtonův gravitační zákon

Každá částice přitahuje každou jinou částici gravitační silou, jejíž velikost je

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.18}$$

kde G je gravitační konstanta, m_1 a m_2 jsou hmotnosti částic a r je jejich vzdálenost.

Moment hybnosti

Moment hybnosti tělesa L je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{L} = m\left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\right).$$

Velikost momentu hybnosti $L = |\boldsymbol{L}|$, která je s pohybem konstantní, vyjadřuje vzorec

$$L = mr_{\perp}v.$$

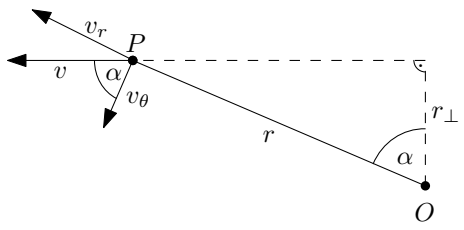
Zavedeme také měrný moment hybnosti jako

$$l = r_{\perp}v \tag{2.19}$$

Výraz (2.19) vyjádříme v polárních souřadnicích užitím rovnice (2.14). Z obrázku 5 plyne

$$l = r_{\perp}v = (r\cos\alpha)\left(\frac{v_\theta}{\cos\alpha}\right) = rv_\theta = r\left(r\dot{\theta}\right) = r^2\dot{\theta} \tag{2.20}$$

Rovnici (2.20) budeme nazývat rovnicí momentu hybnosti.



Obrázek 5: Moment hybnosti

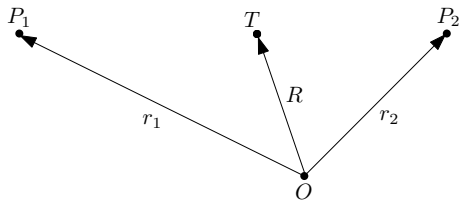
Těžiště

V kapitole zabývající se problémem dvou těles budeme pracovat s pojmem těžiště soustavy dvou těles. Těžiště zavedeme jako bod T, jehož polohový vektor $\boldsymbol{R}$ (viz obrázek 6) je určen vztahem

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2}}{m_1 + m_2}. \tag{2.21}$$

Rychlost těžiště získáme časovou derivací vztahu (2.21).

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}}{m_1 + m_2}. \tag{2.22}$$



Obrázek 6: Těžiště

3 Problém jednoho tělesa

Nyní se budeme zabývat případem vzájemného pohybu dvou těles, z nichž jedno je upevněno v počátku soustavy souřadnic. Tuto situaci nazýváme **problém jednoho tělesa**.

Využijeme-li vztahu (2.15) pro vyjádření zrychlení v polárních souřadnicích a vztahu (2.18) pro velikost gravitační síly, **Newtonovy pohybové rovnice** (2.16) dostanou tvar

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -G\frac{Mm}{r^2}, \tag{3.1}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Tyto rovnice ještě doplníme počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \quad \theta(0) = \alpha, \\ \dot{r}(0) &= v_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vydělením rovnic (3.1), (3.2) hmotností m a integrací druhé rovnice získáváme využitím vztahu (2.20)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2}, \tag{3.4}$$

$$r^2\dot{\theta} = l. \tag{3.5}$$

Bez újmy na obecnosti budeme l považovat za kladné.

3.1 Odvození rovnice dráhy

Vyjdeme z Newtonovy rovnice (3.4) a eliminujeme z ní čas užitím rovnice momentu hybnosti (3.5). Tento postup je uveden například v [1]. Je přitom vhodné užít novou souřadnici u definovanou vztahem

$$u = \frac{1}{r}.$$

Tato transformace má silně zjednodušující efekt. Začneme transformováním $\dot{r}$ a $\ddot{r}$. Podle pravidla o derivování složené funkce

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\left(r^2\dot{\theta}\right)\frac{du}{d\theta} = -l\frac{du}{d\theta}. \tag{3.6}$$

Druhá derivace podle t dává

$$\ddot{r} = -l\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -l\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -l^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Využitím rovnosti $r\dot{\theta}^2 = l^2u^3$ se Newtonova rovnice (3.4) transformuje na tvar

$$-l^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - l^2u^3 = -GMu^2,$$

po vydělení rovnice výrazem l^2u^2 dostáváme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{l^2} \tag{3.7}$$

což je námi hledaná **rovnice dráhy**. Vhodné počáteční podmínky pro rovnici dráhy získáme tak, že zadáme hodnoty u a $\frac{du}{d\theta}$ když $\theta = \alpha$. Protože $u = \frac{1}{r}$, počáteční hodnota u je dána přímo počátečními daty (3.3). Hodnota $\frac{du}{d\theta}$ není zadána přímo, lze ji však odvodit z rovnice (3.6). Počáteční podmínky pro rovnici dráhy mají tvar

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= \frac{1}{r(\alpha)}, \\ \frac{du}{d\theta}(\alpha) &= -\frac{\dot{r}(\alpha)}{l} = -\frac{\dot{r}(\alpha)}{r^2(\alpha)\dot{\theta}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Určení dráhy

V této části odvodíme konečnou podobu oběžných drah Pro jednoduchost uvažujeme polohu v periheliu (bod dráhy nejblíže k centrálnímu tělesu), kde je radiální složka rychlosti (má směr r) nulová, tj $\dot{r} = 0$. Počáteční podmínky (3.8) dostanou podobu

$$u(0) = u_0, \tag{3.9}$$

$$\frac{du}{d\theta}(0) = 0. \tag{3.10}$$

Budeme řešit počáteční problém (3.7), (3.9), (3.10). Nejdříve najdeme řešení příslušné homogenní rovnice

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0. \tag{3.11}$$

Řešení hledáme ve tvaru $u = e^{\lambda\theta}$, přičemž λ je kořenem příslušné charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 1 &= 0 \\ \lambda^2 &= -1 \\ \lambda_{1,2} &= \pm i \end{aligned}$$

Dostali jsme dvě komplexně sdružená čísla, tj.

$$u_h = C_1 e^{i\theta} + C_2 e^{-i\theta}.$$

Pomocí Eulerovy identity můžeme tento vztah upravit

$$u_h = C_1(\cos\theta + i\sin\theta) + C_2(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Odtud

$$\begin{aligned} u_{h1} &= \cos\theta, \\ u_{h2} &= \sin\theta. \end{aligned}$$

Reálná část řešení homogenní rovnice (3.11) je

$$u_h = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta.$$

Řešení nehomogenní rovnice (3.7) můžeme hledat ve tvaru

$$u = u_h + u_p,$$

kde u_p je libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice. Partikulární řešení budeme hledat metodou neurčitých koeficientů ve tvaru

$$u_p = A, \frac{du_p}{d\theta} = 0.$$

Dosazením do rovnice (3.7) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 + A &= \frac{GM}{l^2}, \\ A &= \frac{GM}{l^2}. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (3.7) je

$$u = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \frac{GM}{l^2}. \tag{3.12}$$

Z počátečních podmínek určíme hodnoty konstant C_1 a C_2. Konstantu C_1 určíme pomocí počáteční podmínky (3.9) a získáme

$$\begin{aligned} u(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{GM}{l^2} &= u_0, \\ C_1 + \frac{GM}{l^2} &= u_0, \\ C_1 &= u_0 - \frac{GM}{l^2}. \end{aligned}$$

Pomocí druhé podmínky (3.10) určíme C_2.

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta}(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 &= 0, \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením vypočtených konstant do (3.12) získáváme

$$u = \left(u_0 - \frac{GM}{l^2}\right) \cos\theta + \frac{GM}{l^2}.$$

Zpětným dosazením $u = \frac{1}{r}$ přepíšeme a upravíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{l^2}\right) \cos\theta + \frac{GM}{l^2}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{GM}{l^2} \left(1 + \frac{l^2 - GMr_0}{GMr_0} \cos\theta\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Všimněme si, že výraz (3.13) má stejný tvar jako výraz (2.7). Řešením rovnice dráhy je tedy kuželosečka.

3.3 Perioda eliptické dráhy

Jestliže jsme našli dráhu, po které se těleso pohybuje, jeho pohyb podél ní lze odvodit z rovnice (3.5).

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= l, \\ r^2\frac{d\theta}{dt} &= l, \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{l}r^2\mathrm{d}\theta, \\ \int \mathrm{d}t &= \frac{1}{l}\int r^2\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Pokud vezmeme $\theta = 0$ v čase $t = 0$, pak je doba, za kterou se P dostane do daného bodu na dráze určena vztahem

$$t = \frac{1}{l}\int_0^{\theta_0} r^2\mathrm{d}\theta.$$

Abychom dostali velikost periody T, dosadíme $\theta_0 = 2\pi$.

$$T = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta,$$

kde r je určeno z (3.13). Tento integrál není třeba počítat, protože pro jakoukoliv uzavřenou dráhu, jak je odvozeno například v [7], platí

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta.$$

V případě elipsy $S = \pi ab$, tedy

$$T = \frac{2\pi ab}{l}. \tag{3.14}$$

Když srovnáme výraz (3.13) s polárním vyjádřením elipsy uvedeným v sekci 2.2, nahlédneme, že M, G a l jsou svázány s poloosami elipsy a, b vztahem

$$\frac{GM}{l^2} = \frac{a}{b^2}.$$

Po vyjádření l^2 a dosazení do (3.14) dostaneme vztah

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \tag{3.15}$$

který je námi hledaným vyjádřením periody eliptické dráhy. Uvedené odvození lze nalézt například v [1].

4 Problém dvou těles

Problém určit pohyb dvou volných těles které na sebe vzájemně působí silami se nazývá **problém dvou těles**.

4.1 Vztah k problému jednoho tělesa

Nechť P_1 a P_1 jsou dvě tělesa, které na sebe vzájemně působí silami. Podle Newtonova zákona akce a reakce (2.17) mají tyto síly stejnou velikost, ale opačný směr. Síly $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ působící na P_1, P_2 jsou určeny Newtonovým gravitačním zákonem (2.18) a mají tvar

$$\boldsymbol{F_1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}},$$
$$\boldsymbol{F_2} = +G\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}},$$

kde $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$, $r = |\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|$ a $\widehat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Pohybové rovnice pro P_1, P_2 jsou

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}, \tag{4.1}$$
$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = +G\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}. \tag{4.2}$$

Tento problém dvou těles se dá redukovat na ekvivalentní problém jednoho tělesa.

Všimněme si, že tělesa P_1 a P_2 tvoří uzavřenou soustavu, proto se jejich těžiště pohybuje konstantní rychlostí. Dokážeme to sečtením rovnic (4.1) a (4.2)

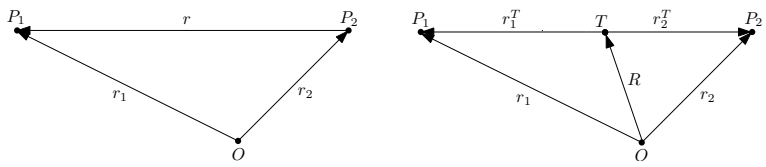
$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = 0,$$

po integraci

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = C\left(m_1 + m_2\right),$$
$$\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}}{m_1 + m_2} = C. \tag{4.3}$$

Vztah (4.3) je vztah pro výpočet rychlosti těžiště (2.22) s konstantou na pravé straně. Těžiště se tudíž pohybuje konstantní rychlostí a jeho pohyb je potom určen z počátečních podmínek.

Zbývá určit pohyb obou těles vzhledem k těžišti. Dle [1] se však ukazuje jako snadnější určit pohyb jednoho tělesa vzhledem ke druhému. Pohyb obou těles vzhledem k těžišti lze pak odvodit.



Obrázek 7: Relativní poloha bodu P_1 vzhledem k P_2 (vlevo) a poloha P_1, P_2 a těžiště T vzhledem k počátku (vpravo)

Odečtením rovnic (4.1), (4.2) získáme

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1}} - \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{2}} &= \frac{\frac{-Gm_1m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}}{m_1} + \frac{\frac{Gm_1m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}}{m_2} \\ &= -\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)\frac{Gm_1m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

Tedy r, což je polohový vektor P_1 vzhledem k P_2 vyhovuje rovnici

$$\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}. \tag{4.4}$$

Nyní zavedeme redukovanou hmotnost μ jako

$$\mu = \left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right). \tag{4.5}$$

Dosazením (4.5) do (4.4) získáme rovnici

$$\begin{aligned}\mu\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{Gm_1m_2}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} = \frac{G\mu(m_1+m_2)}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}, \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Rovnici (4.6) budeme nazývat rovnicí relativního pohybu. Pohyb tělesa P_1 vzhledem k P_2 je stejný, jako by bylo těleso P_2 upevněno a mělo hmotnost $m_1 + m_2$ namísto své skutečné hmotnosti m_2 a těleso P_1 kolem něj obíhalo a mělo redukovanou hmotnost μ. Toto nám dovoluje převést tento problém na ekvivalentní problém jednoho tělesa. Řešení tohoto problému je plně popsáno v kapitole 3.

Pokud jsme našli relativní pohyb dvou těles, můžeme odvodit jejich pohyb vzhledem k těžišti. Polohové vektory těles P_1, P_2 vzhledem k těžišti jsou dle [1] dány vztahy

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{T}} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r}, \tag{4.7}$$

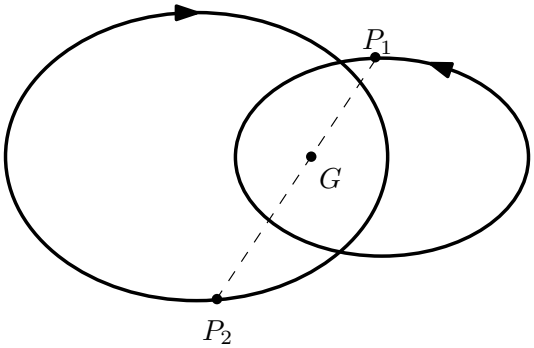
$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{T}} = -\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r}. \tag{4.8}$$

Dráhu tělesa P_1 získáme dosazením vztahu (4.7) do vyjádření dráhy relativního pohybu. Dráhu pro P_2 odvodíme obdobně pomocí vztahu (4.8). Předpokládejme nyní, že dráha tělesa P_1 vzhledem P_2 byla určena jako elipsa. Potom dráhy P_1, P_2 vzhledem k těžišti jsou také elipsy. Poměr jejich hlavních poloos je $m_2 : m_1$ a součet jejich velikostí je stejný jako velikost hlavní poloosy dráhy P_1 vzhledem k P_2.

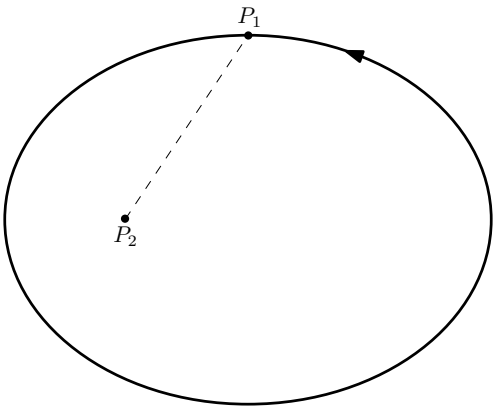
Všechny tyto tři dráhy mají stejnou periodu T danou vztahem

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{G\left(m_1+m_2\right)}, \tag{4.9}$$

kde a je velikost hlavní poloosy dráhy relativního pohybu. Tento vztah získáme snadno dosazením $M = m_1 + m_2$ do (3.15).



Obrázek 8: Pohyb P_1 a P_2 vzhledem k těžišti



Obrázek 9: Relativní pohyb P_1 vzhledem k P_2

Pravděpodobně více než polovina hvězd v naší galaxii nejsou samostatné hvězdy jako naše Slunce, ale vyskytují se ve dvojicích, které se pohybují v důsledku vzájemné silové interakce. Takováto dvojice se nazývá **dvojhvězda**. Dvojhvězdy jsou příkladem problému dvou těles. Obě části dvojhvězdy obíhají své těžiště po eliptických drahách. Dráha jedné hvězdy vzhledem ke druhé je třetí elipsa. Perioda všech tří pohybů je dána vztahem (4.9).

4.2 Kosmické rychlosti

Kosmická rychlost je rychlost, které je potřeba dosáhnout k překonání gravitačního působení daného kosmického tělesa. Rozlišujeme základní dva druhy kosmických rychlostí.

První kosmická rychlost je rychlost, které musí dosáhnout těleso zanedbatelně malé hmotnosti pro pohyb po kruhové dráze kolem pevně upevněného hmotného tělesa v dané výšce r_0.

Úniková rychlost je nejnižší rychlost, které musí dosáhnout těleso zanedbatelně malé hmotnosti, aby opustilo sféru gravitačního vlivu pevně upevněného hmotného tělesa. Malé těleso se v tomto případě pohybuje po parabolické dráze kolem hmotného tělesa v dané výšce r_0. V případě Země se tato rychlost nazývá **Druhá kosmická rychlost**. V případě Slunce mluvíme o **Třetí kosmické rychlosti**.

Úvahy o kosmických rychlostech provádíme pro případy, kdy jedno těleso je nesrovnatelně hmotnější oproti druhému (např. soustava planeta - družice). V této soustavě se redukovaná hmotnost μ přibližně rovná hmotnosti m malého tělesa. To nám dovoluje aproximovat tuto situaci pomocí problému jednoho tělesa.

Ve výrazu (3.13) provedeme označení

$$e = \frac{l^2 - GMr_0}{GMr_0} \tag{4.10}$$

a pomocí vztahu (4.10) provedeme odvození obou kosmických rychlostí.

Podmínka pro první kosmickou rychlost je jednoduchá. Platí $e = 0$.

$$\begin{aligned} e &= 0, \\ \frac{l^2 - GMr_0}{GMr_0} &= 0, \\ l^2 &= GMr_0, \\ (r_0 v)^2 &= GMr_0, \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{r_0}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Podmínka pro únikovou rychlost je opět jednoduchá. Tentokrát musí platit $e = 1$.

$$\begin{aligned} e &= 1, \\ \frac{l^2 - GMr_0}{GMr_0} &= 1, \\ l^2 &= 2GMr_0, \\ (r_0 v)^2 &= 2GMr_0, \\ v &= \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Vztahy (4.11) a (4.12) jsou standardní vzorce pro výpočet kosmických rychlostí, které lze najít například v [2].

4.3 Keplerovy zákony

V této kapitole provedeme odvození Keplerových zákonů. Pro naši Sluneční soustavu můžeme použít model problému jednoho tělesa. Dokážeme to vypočítáním redukované hmotnosti μ soustavy Slunce a některá z planet, například Země. Hmotnost Slunce je $M = 1.9891 \cdot 10^{30}$kg a například hmotnost Země je $m = 5.9736 \cdot 10^{24}$kg. Redukovaná hmotnost této soustavy je

$$\mu = 5.973582060333922 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$
$$\frac{m}{\mu} = 1.000004 \approx 1$$

Součet obou hmotností je

$$M + m = 1.9891059736 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$
$$\frac{M}{M+m} = 0.999996 \approx 1$$

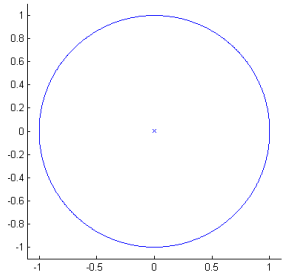
Podobných výsledků se dočkáme i pro ostatní planety. Jsme tedy oprávněni použít pro odvození Keplerových zákonů vztahy plynoucí ze sekce 3.

První Keplerův zákon

Znění: Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách jen málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.
První Keplerův zákon přímo plyne ze sekce (3.2). Dosadíme-li do vztahu (4.10) hodnoty koeficientů pro jednotlivé planety, dostaneme hodnoty blízké nule, což odpovídá elipsám blízkým kružnicím. Ukážeme si to na příkladu Země. Pro Zemi v periheliu platí $r_0 = 147\ 098\ 074$ km a $v = 30.287$ km $\cdot$ s^{-1}. Dále hmotnost Slunce $M = 1.9891 \cdot 10^{30}$kg a gravitační konstanta $G = 6.67384 \cdot 10^{-11}$Nm^{2}kg^{-2}. Dosazením těchto hodnot do vztahu (4.10) získáme hodnotu

$$e = 0.0165,$$

což odpovídá našemu očekávání. Tuto elipsu můžeme vidět na obrázku 10. Obdobné výsledky obdržíme i pro ostatní planety.



Obrázek 10: Elipsa s excentricitou $e = 0.0165$

Druhý Keplerův zákon

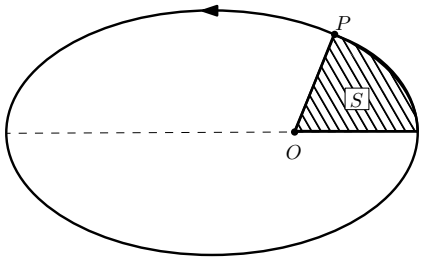
Znění: Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.
V [1] lze najít, že 2. Keplerův zákon je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti. Obsah oblasti S na obrázku 11 lze dle [7] vyjádřit jako

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} r^2 \mathrm{d}\theta.$$

Potom dle pravidla o derivaci složené funkce

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2},$$

kde l je konstantní hodnota momentu hybnosti. Z toho vyplývá, že plocha S narůstá konstaní rychlostí. Tím je druhý Keplerův zákon odvozen.



Obrázek 11: Druhý Keplerův zákon

Třetí Keplerův zákon

Znění: Poměr druhých mocnin oběžných dob planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich oběžných drah.
Ze vztahu (3.15) obdržíme

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{MG}\right)a^3,$$
$$\frac{T^2}{a^3} = \left(\frac{4\pi^2}{MG}\right),$$

tedy

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konst.}$$

Tímto je třetí Keplerův zákon dokázán.

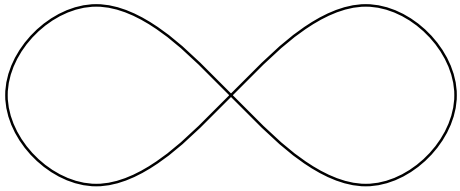
Všechny Keplerovy zákony včetně aplikačních příkladů lze najít v [1] nebo [2].

5 Problém tří těles

V této kapitole se budeme zabývat vzájemným gravitačním působením tří těles. V obecném případě neexistuje analytické řešení v uzavřeném tvaru. V [11] lze však najít řešení pomocí mocninných řad, které ovšem konvergují velice pomalu. Proto je třeba řešit úlohu tří těles numericky a pro každou novou konfiguraci počátečních dat dostaneme obecně jiné dráhy. Jsou však známy jisté speciální případy, takzvané stabilní orbity, kdy známe přesné řešení.

5.1 Stabilní orbity

Stabilní orbity jsou případy periodicky se opakujícího pohybu tří těles, které jsou však velmi výjimečné. Nejsou však nalezeny zdaleka všechny. Vědci stále hledají nové případy. Příklady těchto stabilních orbit lze nalézt v [9], speciální případ stabilních orbit ve tvaru osmičky uvádíme na obrázku 12.



Obrázek 12: Stabilní orbity ve tvaru osmičky

5.2 Numerické řešení problému tří těles

Uvažujme systém tří těles. Jejich polohové vektory jsou $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$ a hmotnosti m_1, m_2 a m_3. Síly, kterými na sebe působí, jsou dány Newtonovými zákony (2.16), (2.17) a (2.18). Pohybové rovnice pro jednotlivá tělesa mají následující tvar

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} &= G\frac{m_2}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}) + G\frac{m_3}{r_{13}^3}(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_1}),\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} &= G\frac{m_1}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) + G\frac{m_3}{r_{23}^3}(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_2}),\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{3}} &= G\frac{m_1}{r_{13}^3}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_3}) + G\frac{m_3}{r_{23}^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_3}),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $r_{ij} = |\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j}|, \quad i,j = 1,2,3$. Soustava (5.1) je druhého řádu. Tu nyní převedeme na soustavu prvního řádu

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} &= \boldsymbol{v_1},\\
\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} &= G\frac{m_2}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}) + G\frac{m_3}{r_{13}^3}(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_1}),\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} &= \boldsymbol{v_2},\\
\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} &= G\frac{m_1}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) + G\frac{m_3}{r_{23}^3}(\boldsymbol{r_3}-\boldsymbol{r_2}),\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{3}} &= \boldsymbol{v_3},\\
\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}} &= G\frac{m_1}{r_{13}^3}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_3}) + G\frac{m_3}{r_{23}^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_3}).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Soustava (5.2) je soustava šesti vektorových, tedy osmnácti skalárních rovnic. V programu MATLAB je budeme reprezentovat vektorem $y = [\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}]$. Pro otestování algoritmů zvolíme počáteční podmínky odpovídající stabilním orbitám ve tvaru osmičky (viz [10]):

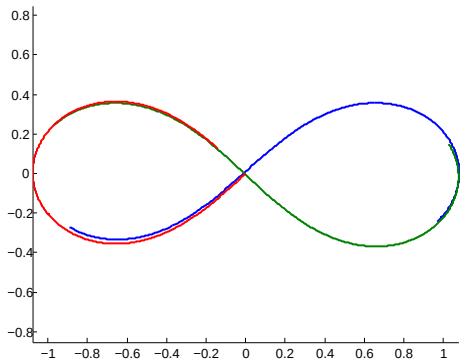
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r_1} &= (0.9700436, -0.24308753, 0),\\
\boldsymbol{r_2} &= (-0.9700436, 0.24308753, 0),\\
\boldsymbol{r_3} &= (0, 0, 0),\\
\boldsymbol{v_1} &= (0.466203685, 0.43236573, 0),\\
\boldsymbol{v_2} &= (0.466203685, 0.43236573, 0),\\
\boldsymbol{v_3} &= (-0.93240737, -0.8647314, 0).
\end{aligned}$$

Uvažujeme-li G jako jednotku, zadáme hodnoty hmotností jednotlivých těles

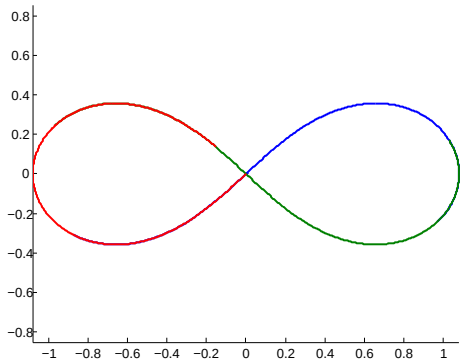
$$m_1 = m_2 = m_3 = 1.$$

Celý problém budeme řešit pomocí skriptu test3 a funkce kepler3, napsaných v programu MATLAB, které jsou uvedeny v příloze. Tento skript je zobecněním skriptu s16, který lze najít v [6], pro případ tří těles. Skript test3 obsahuje Bogacki-Shampine metodu která je v MATLABU implementována jako funkce ode23 a také implicitní metody zpětného derivování implementované v MATLABU jako funkce ode15s.

Bogacki-Shampine metoda je explicitní Runge-Kuttova metoda řádu 3, používá řízení délky kroku a je velmi přesná. Metody zpětného derivování se hodí pro řešení takzvaných tuhých problémů. Ve funkci ode15s jsou obsaženy metody zpětného derivování řádu 1 až 5. Více o obou metodách lze nalézt v [3]. Obrázky 13 a 14 ukazují řešení získaná oběma metodami.



Obrázek 13: Řešení určené metodou zpětného derivování



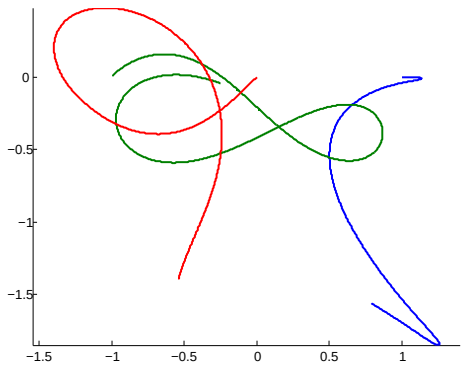
Obrázek 14: Řešení určené metodou Bogacki-shampine

Z uvedených obrázků je patrné, že přesnější řešení jsme obdrželi pomocí metody Bogacki-Shampine.

Dále uvedeme dva příklady řešení problému tří těles Bogacki-Shampine metodou pro uvedené počáteční podmínky. Uvažujme soustavu rovnic (5.2) a následující počáteční podmínky

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r_1} &= (1, 0, 0),\\
\boldsymbol{r_2} &= (-1, 0, 0),\\
\boldsymbol{r_3} &= (0, 0, 0),\\
\boldsymbol{v_1} &= (0.5, 0, 0),\\
\boldsymbol{v_2} &= (0.5, 0.5, 0),\\
\boldsymbol{v_3} &= (-1, -1, 0).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Výsledné řešení je uvedeno na obrázku 15

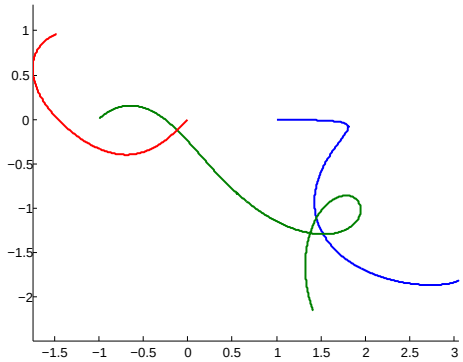


Obrázek 15: Řešení počátečního problému (5.2), (5.3) Bogacki-Shampine metodou

Opět uvažujme soustavu rovnic (5.2) a následující počáteční podmínky

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r_1} &= (1, 0, 0), \\
\boldsymbol{r_2} &= (-1, 0, 0), \\
\boldsymbol{r_3} &= (0, 0, 0), \\
\boldsymbol{v_1} &= (1, 0, 0), \\
\boldsymbol{v_2} &= (0.5, 0.5, 0), \\
\boldsymbol{v_3} &= (-1, -1, 0).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Výsledné řešení je uvedeno na obrázku 16



Obrázek 16: Řešení počátečního problému (5.2), (5.4) Bogacki-Shampine metodou

6 Závěr

Cílem práce bylo shrnout problematiku pohybu vesmírných těles. Věnovali jsme se problému jednoho tělesa. Určili jsme tvar dráhy pohybu. Zjistili jsme, že diferenciální rovnice plynoucí z Newtonových zákonů vedou na rovnice kuželoseček. Dále jsme se zabývali problémem dvou těles. Ukázali jsme, že tento problém lze redukovat na ekvivalentní problém jednoho tělesa a vyřešit stejně jako v předchozím případě. Ukázali jsme, že v případě soustavy dvou těles, kdy jedno je méně hmotné než druhé lze tento případ aproximovat problémem jednoho tělesa. Za tohoto předpokladu jsme odvodili vztahy pro výpočet kosmických rychlostí. Také jsme ze získaných výsledků jsme odvodili Keplerovy zákony. Další situací byl problém tří těles. Tento problém v obecném případě nemá analytické řešení v uzavřeném tvaru, ale řeší se numericky. Existují i speciální případy problému tří těles, tzv. stabilní orbity, kdy tělesa obíhají po stále stejných drahách. U těchto úloh analytické řešení známe. Pro jeden případ stabilních orbit jsme uvedli numerické řešení pomocí dvou metod. Ukázalo se, že řešení získané pomocí explicitní Bogacki-Shampine metody je přesnější než řešení vytvořené pomocí metody zpětného derivování. Uvedli jsme také příklady řešení určeného Bogacki-Shampine metodou pro vybrané počáteční podmínky.

Reference

[1] GREGORY, R. Douglas. Classical Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-051-1160-974.

[2] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky.* 1. vyd. Brno: VUTIUM, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.

[3] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic* [online]. Brno, 2013 [cit. 2013-05-22]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz.

[4] ČERMÁK, Jan a Alexander ŽENÍŠEK. *Matematika III.* 2. vyd. Brno: CERM, 2006, 205 s. ISBN 80-214-3261-6.

[5] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: teoretická část.* 1. vyd. Brno: CERM, 2005, 179s. ISBN 80-214-3100-8.

[6] HLAVIČKA, Rudolf. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic: průvodce softwarem a počítačová cvičení v prostředí MATLABu* [online]. Brno, 2013 [cit. 2013-05-22]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz.

[7] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. *Matematika křivek: studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku* [online]. Hradec Králové [cit. 2013-05-22]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf

[8] JAREŠOVÁ, Miroslava a Ivo VOLF. Souřadnice ve fyzice: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku [online]. Hradec Králové [cit. 2013-05-23]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/sourad.pdf

[9] ŠUVAKOV, Milovan a V. DMITRAŠINOVIĆ. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits. *Physical Review Letters* , 114301 (2013) [online]. 2013, vol. 110, s. 4 [cit. 2013-05-22]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114301. Dostupné z: http://arxiv.org/pdf/1303.0181v1.pdf

[10] Three Bodies on a Figure Eight. [online]. [cit. 2013-05-22]. Dostupné z: http://www.artcompsci.org/

[11] BROUCKE, R. Solution of the N-Body Problem with Recurrent Power Series. *Celestial Mechanics*, [online]. vol. 4, s. 110-115 [cit. 2013-05-23]. Dostupné z: http://articles.adsabs.harvard.edu//full/1971CeMec...4..110B/0000110.000.html