Jana Musilová a Pavla Musilová

MATEMATIKA I
pro porozumění i praxi

NETRADIČNÍ VÝKLAD TRADIČNÍCH TÉMAT VYSOKOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

(Druhé, doplněné vydání)

Vysoké učení technické v Brně / Nakladatelství VUTIUM
Brno 2016

Slovo ke čtenářům

Nevíme, zda patříte k zastáncům názoru, že matematika je disciplínou obtížnou, suchopárnou a nudnou, či zda si dokonce kladete otázku, je-li to opravdu nějaký praktický nástroj, nebo jen oblíbená zábava úzké skupiny podivínů. Věříme, že nikoliv. Už proto, že jste se rozhodli sebrat odvahu a pustit se do studia oboru, pro který je matematika nepostradatelným nástrojem, je-li toto studium myšleno vážně. Jde především o fyziku, jednu z nejnáročnějších, ale také nejkrásnějších a nejdobrodružnějších přírodních věd. Fyzikální zákony nám zasahují do života neustále a stojí v pozadí poznatků veškeré přírodovědy. Vezměme třeba takovou biofyziku, molekulární biologii či genetiku, obory velmi dynamické a v dnešní době velice populární, které se zabývají zákonitostmi života až na samotné molekulární úrovni. Molekuly se skládají z atomů a ty podléhají chemickým vazbám. Atomy a vazby mezi nimi se řídí fyzikálními zákonitostmi mikrosvěta. Kvantová fyzika, popisující chování mikrosvěta, se nejen neobejde bez matematiky, ale sama ve své podstatě je i náročnou matematickou disciplínou. Opačným extrémem je makrosvět a zkoumání zákonů vesmíru, které, řečeno slovy významného fyzika, nositele Nobelovy ceny, Richarda Feynmana „. . . mají často samy podobu matematických rovnic.“ Fyzikálních zákonitostí je také třeba umět využívat ve většině aplikovaných oborů, a to nejen technických, kde to očekáváme s naprostou samozřejmostí, ale i třeba lékařských. Životně důležité lékařské přístroje — ultrazvukové aparáty, počítačové tomografy, přístroje na sledování krevního průtoku, ale i obyčejné rentgeny nebo běžné tlakoměry jsou založeny na fyzikálních principech a často dokonce i na výsledcích řešení čistě matematických problémů. Bez určitých partií matematiky se dnes daleko nedostanou ani takové vědy, jako jsou třeba ekonomie, sociologie či psychologie.

Jestliže chcete již od samého začátku pronikat do podstaty zákonitostí nejen fyzikálních, na nichž stojí obor vašeho studia, s porozuměním, neobejdete se bez přiměřeného matematického zázemí. Právě vám je určena tato kniha jako příručka či průvodce labyrintem základních matematických discplín. Možná vás matematika zaujme a budete se studiu jednotlivých matematických oblastí — algebry, geometrie, matematické analýzy, matematické statistiky a řadě dalších — jednou věnovat opravdu do hloubky. Takové studium musí být ovšem založeno na zcela korektním pojetí každé z těchto disciplín a vyžaduje čas. V situaci, kdy potřebujete průběžně sledovat fyzikální výklad, číst fyzikální, technickou či jinou literaturu a všemu rozumět i z matematického hlediska, se času k podrobnému studiu čistě matematických předmětů často nedostává. A není to v této chvíli ani nezbytně třeba. To, co potřebujete nutně, je vědět, co říkají matematické vztahy, umět číst tabulky a grafy, zvládnout základní operace matematické analýzy či lineární algebry, vyznat se v základních geometrických útvarech, pochopit pojem pravděpodobnosti a dokázat statisticky zpracovat jednoduchá měření. A ve všech těchto oblastech zvládnout praktickou výpočetní rutinu. Tento text by vám k tomu měl poskytnout všechno potřebné. Jeho pokračování *Matematika pro porozumění i praxi II, III* se rovněž věnuje lineární algebře a matematické analýze, avšak již na pokročilejší úrovni. Jako by se naše matematické poznání odvíjelo po spirále: tři díly — tři závity spirály. K lineární algebře se budeme v druhém dílu vracet dokonce dvakrát, poprvé na obecné úrovni, podruhé v geometrických a fyzikálních aplikacích. Třetí díl obsahuje algebru multilineární — počítání s tenzory. Výklad matematické analýzy, započatý v tomto dílu diferenciálním a integrálním počtem funkcí jedné proměnné, bude v dalších dvou částech knihy pokračovat od obyčejných diferenciálních rovnic přes analýzu funkcí více proměnných až k problematice variačního počtu, nekonečných řad funkcí, parciálních diferenciálních rovnic a vyvrcholí analýzou funkcí komplexní proměnné. K získání konkrétnější představy o druhé části stačí podívat se na konec tohoto dílu.

Přestože si kniha klade za cíl poskytnout čtenáři co nejlepší vstupní informaci o pojmech a problémech disciplíny základního kurzu vysokoškolské matematiky, zajišťuje takříkajíc „seznamovací fázi“ studia matematiky. To ostatně napovídá i její název. Budoucí profesionální fyzikové či absolventi technických inženýrských oborů, o budoucích matematicích ani nemluvě, se však nemohou obejít bez absolvování jednotlivých disciplín matematiky tvořených vždy uceleným systémem definic pojmů a následných tvrzení s přesně formulovanými důkazy a doprovodnými aplikacemi. K tomu patří i studium odpovídajících učebnic s výkladem vedeným klasickým způsobem a respektujícím všechny osvědčené zvyklosti. V takových případech se pak čtenář může k naší knize vrátit jako k doplňkovému čtení a zásobárně motivačních příkladů.

Matematických knih existuje velmi mnoho a stále vycházejí nové. Možná se ptáte, čím se právě tato od nich liší. Početnou řadu existujících dobrých učebnic základního kurzu vysokoškolské matematiky lze roztřídit do dvou kategorií: Na jedné straně texty založené na nekompromisně korektním výkladu vedeném v systému „definice — věta — důkaz“ a doplněném příklady, na straně druhé takzvané „kalkuly“, zaměřující se většinou na pouhé rutinní užití praktické matematiky. Charakter některých oblastí, jimž je matematika nepostradatelným nástrojem, však vyžaduje obojí — hlubší proniknutí do podstaty pojmů a matematických tvrzení i pohotovou praxi — právě k nim patří obory přírodovědné a technické, ale stále častěji i již zmíněné obory ekonomické či lékařské a při hlubším studiu i některé humanitní. Tento text proto není ani kompromisem, ani střední cestou mezi oběma uvedenými přístupy, nýbrž se snaží o symbiózu jejich pozitivních rysů — matematickou důslednost a praktickou použitelnost. V jistém smyslu dokumentuje oprávněnost kombinace deduktivního a induktivního způsobu výkladu, obvyklé v přírodovědných oborech, také v matematice. Základem způsobu podání problematiky je příklad: motivační, ilustrační i aplikační, popisující situace jak akademické, tak praktické a „ze života“. Je to, dalo by se skoro říci, „výuka na příkladech“. I při tomto stylu jsou však pojmy definovány korektně a tvrzení při průběžném výkladu odvozována, dokazována či přinejmenším vysvětlována. Předpoklady, které mají být splněny, aby výsledky či tvrzení platily, nejsou opomíjeny. Naopak, jsou uváděny i ukázky toho, jaký vliv na výsledky může mít neplatnost předpokladů. Co jsme si dovolily vynechat, jsou pro aplikace mnohdy zbytečně obecné verze matematických tvrzení se zdlouhavými důkazy.

Pro lepší orientaci v textu jsou důležité vztahy, tvrzení a samostatně označené věty uváděny na žlutém pozadí. Také psaní definic, jichž obsahuje matematika vždy dost, má svá pravidla: Nově zaváděný pojem je vypsán kurzívou a některé zvláště důležité definice jsou zvýrazněny modrým pozadím. Obtížné úlohy ve cvičeních jsou označeny hvězdičkou.

Kniha je sice určena především studentům technicky, přírodovědně, lékařsky a ekonomicky zaměřených oborů vysokých škol, může však posloužit i nadaným středoškolákům a vůbec všem, kdo chtějí poznat matematiku zase z jiné strany a přesvědčit se, že může být docela zábavná. Jediným předpokladem, který umožní čtenáři pohodlně začít se studiem knihy, je znalost gymnaziální matematiky.

Rády bychom poděkovaly všem našim kolegyním a kolegům, kteří mají na vzniku a vydání textu zásluhu. Profesoru RNDr. Michalu Lencovi, PhD, děkujeme za podnět k napsání textu, který vznikal souběžně s nově připravovanými přednáškami pro studenty bakalářských studijních programů Fyzika a Aplikovaná fyzika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity a programu Fyzikální inženýrství na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně. Děkujeme mu i za stálou podporu a kritické přečtení celku. Mgr. Lence Czudkové, Ph.D., vděčíme za neobyčejně pečlivé pročtení textu včetně kontroly tabulek, výpočtů a výsledků cvičení. Neobyčejně cennými obsahovými i formálními připomínkami pomohli vylepšit náš text naši kolegové — matematici RNDr. Vlasta Krupková, CSc., Prof. RNDr. Demeter Krupka, DrSc., Doc. RNDr. Jan Čermák, CSc., a Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc. Všem děkujeme za důkladné přečtení a posouzení textu, za podněty k jeho zdokonalení i za morální oporu. Profesoru Ženíškovi pak navíc i za velmi přínosné a obohacující debaty jak přímo k textu, tak také o matematice jako součásti kultury a o kultuře v matematickém myšlení.

Bez Ing. Jakuba Zlámala, Ph.D., Mgr. Jany Hoderové, Ph.D., a Mileny Bartošové by v textu nebyly tak pěkné obrázky a ani celková úprava by nebyla tak estetická. Rovněž jim děkujeme. Ředitelce nakladatelství VUTIUM PhDr. Aleně Mizerové, prorektorovi Prof. Ing. Pavlu Jurovi, CSc., a Prof. RNDr. Petru Dubovi, CSc., náleží dík za vše, čím přispěli k vydání knihy. Naše poděkování patří i kolegům Mgr. Tomáši Tycovi, Ph.D., a Mgr. Ondřeji Přibylovi, kteří nás inspirovali svými nápady, RNDr. Marii Budíkové, Dr., za poskytnutí některých příkladů do cvičení ke kapitole 3, Mgr. Josefu Klusoňovi, Ph.D., Mgr. Tomáši Nečasovi, Mgr. Martinu Mrázovi, Mgr. Jitce Janové, Mgr. Štěpánu Ledvinkovi a dalším za pomoc při tvorbě řešení ke cvičením. Nemalou zásluhu na konečné podobě textu mají naši studenti aplikované fyziky a biofyziky, jeho první čtenáři a kritikové přípravných verzí textu.

Zvláštní poděkování si zaslouží náš učitel, pan profesor RNDr. Martin Černohorský, CSc., který nám byl nápomocen svými radami a optimismem a zastupoval nás při jednáních vedoucích k vydání knihy.

Nakonec ještě jedna prosba k vám, čtenářům: Podle jednoho z Murphyho zákonů je v každém textu po každé korektuře alespoň jedna chyba. Přestože jsme se snažily, aby jich bylo co nejméně, jsme si vědomy toho, že zákony platí. Uvítáme proto každé upozornění na chyby či připomínky, které nám adresujete, nejlépe na elektronickou adresu pavla@physics.muni.cz.

Brno, červenec 2006 Jana Musilová a Pavla Musilová

Obsah

Kapitola 1

Všemocná úměra aneb lineární algebra poprvé

Tuto kapitolu bychom mohli opatřit podtitulem „To nejnutnější z lineární algebry“. Dovíme se v ní, co je třeba si představit pod pojmem „linearita“, najdeme příklady linearity v geometrii i v přírodovědě (fyzice, chemii, biologii) a formulujeme základní poznatky týkající se řešení soustav lineárních rovnic. Do této oblasti patří i počítání s vektory a maticemi — objekty, které jsou velmi vhodné k vyjádření fyzikálních veličin.

1.1 Lineární rovnice

Co tedy znamená slovo *linearita*? Pochází z latiny, *linea recta* = *přímka*, česky bychom řekli *přímá úměrnost* nebo jen jednoduše *úměra*.

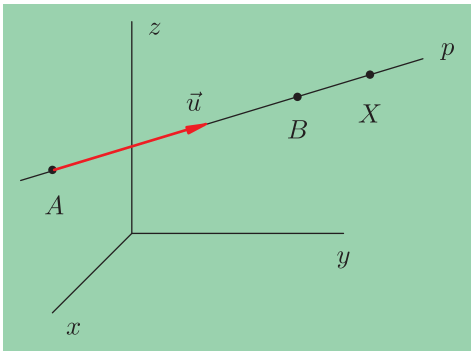
1.1.1 Kde všude se setkáme s úměrou — příklady linearity

Nejjednodušší příklady linearity patří do oblasti geometrie — vyjádření přímek a rovin. Jistě si ze střední školy vzpomínáte, že body těchto útvarů popisujeme jejich souřadnicemi na přímce $\mathbf{R}$, v rovině $\mathbf{R}^2$, v prostoru $\mathbf{R}^3$. Souřadnice bodu v rovině tedy tvoří uspořádanou dvojici reálných čísel, v prostoru pak uspořádanou trojici reálných čísel. (Pozor, dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$ představují různé body.)

Příklad 1.1: Parametrické vyjádření přímky

Přímka — jednorozměrný lineární útvar v jednorozměrném prostoru $\mathbf{R}^1$, dvojrozměrném prostoru $\mathbf{R}^2$, trojrozměrném prostoru $\mathbf{R}^3$ (nebo i n-rozměrném prostoru $\mathbf{R}^n$), je určena dvěma body, třeba A a B, nebo ekvivalentně, bodem A a *směrovým* vektorem $\vec{u}$ (obr. 1.1). Je-li X obecným bodem na této přímce, je vektor $\overrightarrow{AX}$ rovnoběžný, tj. *kolineární*, se směrovým vektorem $\vec{u}$. (Jako směrový můžeme samozřejmě použít i vektor $\overrightarrow{AB}$.) Vektor $\overrightarrow{AX}$ má tedy s vektorem $\vec{u}$ stejný směr, lišit se může velikostí nebo orientací. Tuto skutečnost zapíšeme tak, že $\overrightarrow{AX}$ je t-násobkem vektoru $\vec{u}$,

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.$$



Obr. 1.1 Zadání přímky.

Veličinou t, takzvaným *parametrem*, který může nabývat všech reálných hodnot, $t \in \mathbf{R}$, dokážeme popsat všechny vektory $\overrightarrow{AX}$, jejichž koncový bod X leží na přímce p. Naopak, žádné jiné body X než ty, které leží na přímce p, tuto vlastnost nemají. S označením bodů A, X, resp. vektorů $\vec{u}$, $\overrightarrow{AX}$ kartézskými souřadnicemi, resp. složkami

$$A = (x_A, y_A, z_A),\ X = (x, y, z),\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \overrightarrow{AX} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A)\,,$$

dostáváme *parametrické vyjádření přímky* p ve tvaru

$$p = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x = x_A + tu_1,\ y = y_A + tu_2,\ z = z_A + tu_3,\ t \in \mathbf{R}\big\}. \tag{1.1}$$

Kartézské souřadnice bodu na přímce se vůči souřadnicím bodu A mění přímo úměrně v závislosti na hodnotě parametru t — závisí na jeho první mocnině. Příslušná závislost se nazývá lineární funkcí.

Obdobně zapíšeme parametrické vyjádření roviny v $\mathbf{R}^3$:

Příklad 1.2: Parametrické vyjádření roviny

Rovina v trojrozměrném prostoru $\mathbf{R}^3$ je zadána třemi body A, B a C, které nesmějí ležet v jedné přímce, popřípadě dvěma body A a B a vektorem $\vec{v}$ nerovnoběžným s $\overrightarrow{AB}$, anebo bodem A a dvěma nerovnoběžnými *směrovými* vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (obr. 1.2). Všechny tyto typy zadání jsou ekvivalentní. Lze volit například $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Je-li X libovolným bodem roviny ϱ, jsou vektory $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ *lineárně závislé*. To znamená, že existují taková reálná čísla r a s, že vektor $\overrightarrow{AX}$ lze zapsat jako *lineární kombinaci*

$$\overrightarrow{AX} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \quad r,\, s \in \mathbf{R}\,.$$

Při obdobném zápisu kartézských souřadnic bodů a složek vektorů jako u vyjádření přímky dostaneme *parametrické vyjádření roviny* ϱ

$$\varrho = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x = x_A + ru_1 + sv_1,\ y = y_A + ru_2 + sv_2,\ z = z_A + ru_3 + sv_3,\ r, s \in \mathbf{R}\big\}. \tag{1.2}$$

Toto vyjádření obsahuje opět lineární závislost: Souřadnice x, y a z se vůči souřadnicím bodu A mění v závislosti na prvních mocninách parametrů r a s. Můžeme tak hovořit o jakési „vícerozměrné úměře“.

$1 \leq j \leq n$, jsou zadány. Lze je uspořádat do takzvaných *matic*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice A je *typu* m/n, má m řádků a n sloupců, i je *řádkový index* a j je *sloupcový index*. Matice $\bar{B}$ je typu $m/1$ (m řádků a jeden sloupec), hovoříme také o *sloupcové* matici. Soustavu **S** můžeme zapsat zkráceně pomocí *maticového násobení* (podrobněji viz později odstavec 1.3):

$$A \cdot X = \bar{B}, \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

V tuto chvíli vysvětlíme podstatu maticového násobení jen technicky: Násobit mezi sebou můžeme matici $A = (a_{ij})$ typu m/n (levý činitel) a matici $C = (c_{jk})$ typu n/p (pravý činitel, činitele nelze zaměňovat). Výsledkem je matice $D = (d_{ik})$ typu m/p, jejíž prvky se počítají podle předpisu

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk}. \tag{1.9}$$

Z tohoto obecného předpisu vidíme, že levé strany soustavy **S** lze interpretovat ve tvaru součinu matice A typu m/n s maticí neznámých typu $(n/1)$, výsledkem je matice pravých stran $\bar{B}$, která je typu $m/1$. Matice A se nazývá *maticí soustavy*. Matice, která vznikne jejím rozšířením o sloupec pravých stran, tj.

$$B = (A|\bar{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

je pak *rozšířenou maticí soustavy*. Je-li sloupec pravých stran soustavy tvořen samými nulami, nazývá se soustava *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*. *Řešením soustavy* **S** nazýváme každou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, která soustavu **S** splňuje. Cílem je najít všechna řešení soustavy **S**. Abychom řešení nalezli, musíme soustavu upravovat, zjednodušovat. Prováděné úpravy mají vést k jednodušší, avšak *ekvivalentní* soustavě rovnic, tj. takové, která má naprosto stejný soubor všech řešení jako soustava původní. Takové úpravy nazýváme *ekvivalentními*. Dvě základní, pomocí nichž lze uskutečnit všechny ostatní, jsou některá z rovnic ekvivalentní soustavy tvar $0 = 1$, soustava tedy nemá řešení. Můžeme tak formulovat kritérium (podmínku nutnou a postačující) řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.

Věta 1.1 (Frobeniova): *Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, je-li hodnost její matice rovna hodnosti matice rozšířené.*

Ihned vidíme, že homogenní soustava má podle této věty řešení vždy, neboť poslední sloupec její rozšířené matice je složen ze samých nul. Skutečně, jedním ze souboru řešení každé homogenní soustavy je n-tice

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)\,,$$

zvaná *triviální řešení*.

Nyní se vraťme k otázce, jak zjistit, kolik řešení má daná soustava, a jak je všechna popsat. Poslouží nám příklad 1.9 v mírné obměně spočívající v záměně koeficientu b_3 z hodnoty 6 na -6.

Příklad 1.10: Ještě jednou Gaussova eliminační metoda

Je zadána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= -6. \end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy má nyní tvar

$$B = (A|\bar{B}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Stejné ekvivalentní úpravy jako v příkladu 1.9 vedou nyní k výsledku

$$B \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní platí $h(A) = h(B) = 2$. Podle Frobeniovy věty tedy soustava určitě má řešení. Ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ x_4 - x_5 &= -1, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice je identitou a můžeme ji vypustit. Máme pět neznámých a jen dvě nezávislé rovnice. Dvě z neznámých tedy můžeme vyjádřit pomocí zbývajících. Postupujeme „odzadu“, začínáme druhou, jednodušší, rovnicí:

$$\begin{aligned} & & x_4 &= -1 + x_5, \\ x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 &\implies & x_1 &= -2x_2 + x_3 + 4x_5 + 1. \end{aligned}$$

1.2 Počítání s čísly

Někdo se jistě pozastaví nad tím, že jej chceme učit počítání s čísly. To přece každý umí už od základní školy! Jenže základní a do značné míry i střední škola nás učí počítat jen s určitým typem čísel — s čísly reálnými. Pravidla pro počítání s nimi se pro „běžné uživatele“ stala natolik rutinní záležitostí, že už o nich vůbec nepřemýšlejí, nehledají v nich zákonitosti, a kdybychom se jich zeptali, kde se tato pravidla vzala, pravděpodobně budou s odpovědí velmi váhat. Pravidla pro jakékoli početní operace totiž skutečně nelze z ničeho odvodit, ta je třeba *definovat*, samozřejmě tak, aby měla rozumné praktické vlastnosti.

1.2.1 Reálná čísla

U reálných čísel se opravdu dlouho nezdržíme, s těmi snad opravdu každý umí počítat. Všimneme si jen trochu podrobněji struktury množiny všech reálných čísel, *reálné osy* $\mathbf{R}$. Zobrazit reálná čísla na reálné ose, tedy na přímce, umíme proto, že na množině reálných čísel je definováno *úplné uspořádání* „$\leq$“:

- Je-li současně $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = b$ pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$ ... *antisymetrie*,
- je-li současně $a \leq b$ a $b \leq c$, pak $a \leq c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ ... *tranzitivita*,
- $a \leq a$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$ ... *reflexivita*,
- platí $a \leq b$ nebo $b \leq a$ pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$ ... *úplnost*.

Pro každá dvě čísla a a b tedy dokážeme rozhodnout, zda jsou shodná ($a = b$), nebo zda a je menší ($a < b$) či větší ($a > b$) než b. Platí:

$$\begin{array}{llll} \text{Je-li současně } a < b & \text{a} \;\; c \leq d, & \text{pak} & a + c < b + d, \\ \text{je-li současně } a < b & \text{a} \;\; c > 0, & \text{pak} & ac < bc, \\ \text{je-li současně } a < b & \text{a} \;\; c < 0, & \text{pak} & ac > bc. \end{array}$$

Množina reálných čísel obsahuje tyto důležité podmnožiny:

- Množinu *přirozených* čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Platí *princip úplné indukce*: Je-li $M \subseteq \mathbf{N}$ nějaká množina přirozených čísel, která obsahuje číslo 1 a která současně s každým číslem n obsahuje i $n + 1$, pak $M = \mathbf{N}$.
- Množinu *celých čísel* $\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$.
- Množinu *racionálních čísel* $\mathbf{Q}$ (zlomky). Racionální čísla lze vyjádřit *konečnými desetinnými zlomky* (například $p/q = 1/4 = 0{,}25$), nebo *nekonečnými periodickými desetinnými zlomky* (například $p/q = 4/3 = 1{,}33\ldots33\ldots = 1{,}\overline{3}$, $p/q = 24/11 = 2{,}181\,8\ldots1\,818\ldots = = 2{,}\overline{18}$).

- Množinu *iracionálních čísel*, tj. čísel, která nejsou racionální. Iracionálními čísly jsou neracionální řešení algebraických rovnic, například $x^2-2=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$, nebo $x=-\sqrt{2}$ (*čísla algebraická*), a čísla typu π, e, atd. (*čísla transcendentní*). Iracionální čísla jsou vyjádřena nekonečnými neperiodickými desetinnými zlomky, například $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,545\ldots$ Mezi každými dvěma reálnými čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních i nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Pro počítání s reálnými čísly jsou zavedeny základní operace, s nimiž umíme pracovat na základě zkušenosti, *sčítání* $a+b$, *odčítání* $a-b$, *násobení* $a\cdot b$, resp. ab a *dělení* $a:b$. Ve skutečnosti jsou potřeba jen dvě, neboť odčítání je odvozeno pomocí sčítání a dělení pomocí násobení. Uvědomili jste si někdy základní vlastnosti těchto operací? Možná ne, ale pracujete s nimi zcela samozřejmě:

$a+b=b+a$	komutativní zákon pro součet
$(a+b)+c=a+(b+c)$	asociativní zákon pro součet
$a+0=0+a=a$	existence univerzálního neutrálního prvku 0
$a+(-a)=(-a)+a=0$	existence právě jednoho opačného prvku k číslu a
$ab=ba$	komutativní zákon pro součin
$a(bc)=(ab)c$	asociativní zákon pro součin
$a(b+c)=ab+ac$	1. distributivní zákon
$(b+c)a=ba+ca$	2. distributivní zákon
$a\cdot 1=1\cdot a$	existence univerzálního jednotkového prvku 1
$aa^{-1}=a^{-1}a$	existence právě jednoho inverzního prvku k číslu a, pokud $a\neq 0$
$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ nebo $b=0$	neexistence dělitelů nuly

Odčítání a dělení:

$$a-b=a+(-b),\quad a:b=ab^{-1},\quad \text{pokud}\quad b\neq 0\,.$$

1.2.2 Komplexní čísla

Komplexními čísly rozumíme uspořádané dvojice $[x,\,y]$ čísel reálných, pro které zavedeme určité operace. Uspořádaností dvojice zde myslíme to, že jedno z čísel (v našem zápisu x) je umístěno na první pozici dvojice a představuje *reálnou část* čísla z, $x=\mathrm{Re}\,z$, druhé (v našem zápisu y) je na druhé pozici a je *imaginární částí* čísla z, $y=\mathrm{Im}\,z$. Je tedy obecně $[x,\,y]\neq[y,\,x]$. Množinu

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbf{R}$, popřípadě $a_{ij} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (*řádkový index* — určuje, ve kterém řádku se nachází prvek a_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n$ (*sloupcový index* — určuje, ve kterém sloupci stojí prvek a_{ij}). Pro $m = n$ se matice nazývá *čtvercová n-tého řádu.* Některé čtvercové matice mají speciální tvar:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

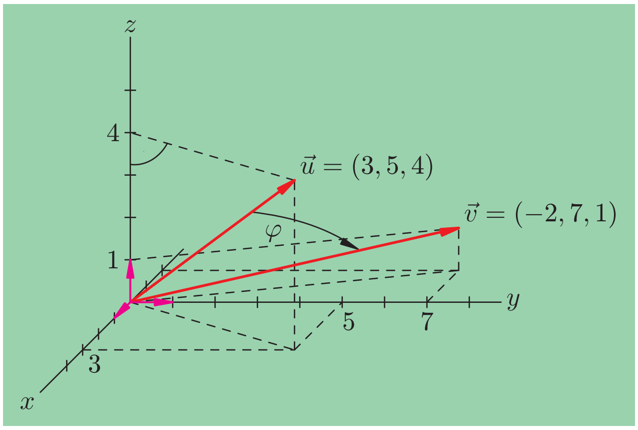
$$T_d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_h = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

D je matice *diagonální* (má nenulové prvky pouze na úhlopříčce — diagonále — čtvercového zápisu), matice T_d *dolní trojúhelníková* (její nenulové prvky tvoří trojúhelníkové uspořádání zahrnující diagonálu a oblast pod diagonálou) a obdobně matice T_h je *horní trojúhelníková.* Označme nyní $\mathcal{M}(m/n)$ množinu všech matic typu m/n. Jestliže $A, B \in \mathcal{M}(m/n)$,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

definujeme jako *součet matic A a B* matici $C \in \mathcal{M}(m/n)$ takto:

$$C = A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$



Obr. 1.7 K příkladu 1.27.

těchto vektorů:

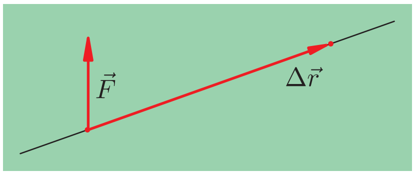
$$\vec{u}\vec{v} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 33\,.$$

Z definice skalárního součinu můžeme určit úhel vektorů, známe-li jejich velikosti. V ortonormální bázi (všimněte si souhlasu vzorce pro výpočet velikosti s definicí skalárního součinu)

$$|\vec{u}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,, \quad |\vec{v}| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\,, \quad \cos\varphi = \frac{33}{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{11}{10\sqrt{3}} \doteq 0{,}635.$$

Příklad 1.28: Práce síly $\vec{F}$ při posunutí částice o $\Delta\vec{r}$

Na hmotný bod působí stálá síla $\vec{F} = (F_1,\, F_2,\, F_3)$. Jakou práci A vykoná tato síla při posunutí bodu o vektor $\Delta\vec{r} = (\Delta r_1,\, \Delta r_2,\, \Delta r_3)$? Složky síly jsou vztaženy k ortonormální bázi. Jsou-li složky síly zadány



Obr. 1.8 K příkladu 1.28.

v newtonech a složky vektoru posunutí v metrech, je práce v joulech definována jako skalární součin vektoru síly a vektoru posunutí:

$$A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F_1\Delta r_1 + F_2\Delta r_2 + F_3\Delta r_3\,.$$

Je-li $\vec{F} = (-4{,}1,\ 2{,}3,\ -3{,}8)$ N a $\Delta\vec{r}$ postupně (1) $\Delta\vec{r} = \vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ m, (2) $\Delta\vec{r} = \vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ m, (3) $\Delta\vec{r} = \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ m, dostaneme

$$A_{(1)} = -4{,}1 \text{ J}, \quad A_{(2)} = 2{,}3 \text{ J}, \quad A_{(3)} = -3{,}8 \text{ J}.$$

Položme si otázku, pro jaký vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ jednotkové délky je práce největší a jak je v takovém případě velká.

$$A = \vec{F}\,\Delta\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cos \sphericalangle(\vec{F}, \Delta\vec{r})\,.$$

Při pevné délce vektoru posunutí je práce největší pro případ, že síla svírá s posunutím nulový úhel. Je-li délka posunutí jednotková, je maximální práce číselně rovna $|\vec{F}|$ a bude zadána v joulech, jsou-li složky síly

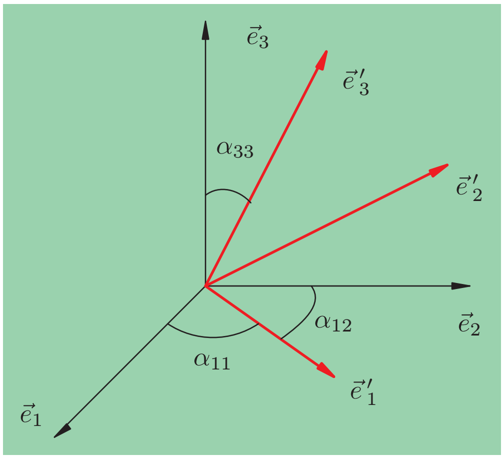
Obdobně
$$\sigma_{ji} = \cos\beta_{ji}, \quad \beta_{ji} = \sphericalangle(\vec{e}_j, \vec{e}\,'_i)\,.$$
Protože je zřejmé, že $\alpha_{ij} = \beta_{ji}$ (při měření velikosti úhlu mezi vektory nezáleží na jejich pořadí), je také
$$\tau_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{1.40}$$

V případě ortonormálních bází jsou matice přechodu T a S navzájem transponované (jedna z druhé vzniká záměnou řádků za sloupce). Platí tedy
$$T^{-1} = T^T, \quad S^{-1} = S^T. \tag{1.41}$$

Matice T a S jsou takzvané *ortogonální matice*. Inverzní matice tedy nemusíme počítat, stačí vyměnit řádky za sloupce. Pro prvky matic přechodu dostáváme z ortonormality bází takzvané *relace ortogonality*
$$\sum_{k=1}^{3} \tau_{ik}\tau_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{3} \tau_{ki}\tau_{kj} = \delta_{ij}\,.$$

Příklad 1.34: Přechody mezi bázemi

Pro určení přechodu mezi pravotočivými ortonormálními bázemi jsou zadány tyto údaje:
$$\alpha_{11} = 30^0, \quad \alpha_{12} = 60^0, \quad \alpha_{33} = 45^0.$$
Určíme matice přechodu T a S. Protože $\alpha_{11} + \alpha_{12} = 90^0$, vidíme, že vektor $\vec{e}\,'_1$ leží v rovině vektorů $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$.



Obr. 1.12 K příkladu 1.34.

S vektorem $\vec{e}_3$ tedy svírá pravý úhel, tj. $\alpha_{13} = 90^0$. Platí tedy
$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Kapitola 2

Závislosti na každém kroku aneb funkce jedné proměnné

S funkcemi se setkáváme na každém kroku nejen ve fyzice a v ostatních přírodních vědách, ale i v každodenním životě. Každá situace, kdy jsou nějaký jev či veličina jednoznačně a nevyhnutelně určeny jinými jevy či veličinami, se dá popsat pomocí funkce. Někdy je jednoduché takovou funkci sestavit. Snadno například můžeme zjistit, jakou dráhu urazí automobil jedoucí známou rychlostí v závislosti na tom, jak dlouho jede. Nebo dokážeme určit přírůstek našich úspor ve spořitelně v závislosti na době spoření, pokud známe úrokovou míru a její změny. Jindy je naopak skoro nemožné přijít na to, jak taková funkce vypadá, neboť nemáme dostatek informací o parametrech, které do jejího zápisu vstupují. Třeba takovou závislost teploty ovzduší v daném okamžiku na zeměpisné poloze a nadmořské výšce, kterou bychom si mohli představit jako jednu ze samozřejmých součástí předpovědi počasí, bychom asi nesestavili. Popis jevů pomocí funkcí je v každém případě velmi užitečný. Má však svá pravidla, s nimiž se v této kapitole seznámíme. Závisí-li zkoumaný jev nebo veličina na jediné veličině, jejíž hodnoty jsou reálné a buď se mění známým způsobem, nebo si je můžeme dokonce volit, hovoříme o funkci jedné reálné proměnné. A lze-li zkoumaný jev nebo veličinu kvantifikovat rovněž pomocí reálných hodnot, jedná se o *reálnou funkci jedné reálné proměnné*. Právě o takových funkcích bude v této kapitole řeč. V aplikacích se budeme věnovat především funkcím, které mají význam ve fyzice a v přírodních vědách. Velmi často půjde o funkce, kde reálnou proměnnou je čas. Jevy v přírodě podléhají totiž principu příčinnosti, a tak lze velké množství veličin popisujících přírodní jevy vyjádřit na základě znalosti přírodních zákonů jako funkce času.

2.1 Funkce a její graf

V tomto odstavci se naučíme funkce zadávat, počítat s nimi a vyjádřit je velmi přehledným způsobem — jejich *grafem*.

2.1.1 Způsoby zadání funkce

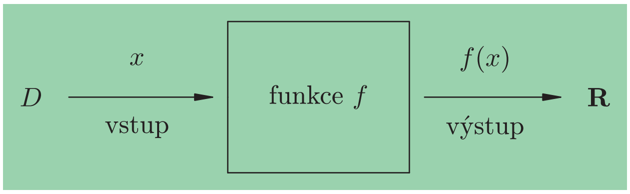
Nejprve funkci definujeme. Předpokládejme, že reálná proměnná, na níž bude záviset náš jev, má dovoleno nabývat hodnot z určité předem stanovené podmnožiny $D \subseteq \mathbf{R}$ reálných čísel. Předpokládejme dále, že podle určitého pravidla, předpisu, dokážeme pro *každou* hodnotu x z množiny D, tj. $x \in D$, určit *právě jednu* reálnou hodnotu y. Každé hodnotě $x \in D$ tedy nějaké y příslušet musí, avšak žádné hodnotě x nesmíme přiřadit více hodnot y. Tak vzniká funkce f. Hodnoty x se nazývají hodnotami *nezávisle proměnné* (neboli *argumentu*), hodnoty y hodnotami *závisle proměnné* a f symbolizuje *funkční předpis*. Píšeme

$$f:\ D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Hodnoty proměnné x nazýváme též *vzory*, odpovídající hodnoty $y = f(x)$ *obrazy*. Množina D je *definičním oborem* funkce f. Zadání definičního oboru je důležitou součástí zadání funkce. Množina H všech takových reálných hodnot y, které jsou obrazem nějakého vzoru, tj.

$$H = \{y \in \mathbf{R} \mid \text{existuje } x \in D \text{ tak, že } y = f(x)\},$$

se nazývá *obor hodnot* funkce f. Hodnotu $f(x)$ nazýváme také *funkční hodnotou funkce f v bodě x*. Funkci si můžeme představit jako „černou skříňku“, do které vstoupí hodnota x (vzor) a vystoupí z ní hodnota $y = f(x)$ (obraz). Množinu uspořádaných dvojic čísel $[x, f(x)]$ nazveme *grafem funkce*.



Obr. 2.1 Funkce jako „černá skříňka“.

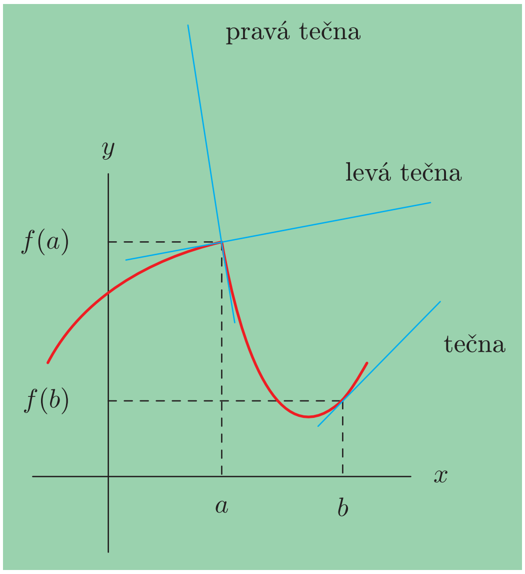
Jak zadat předpis f? Lze to udělat kterýmkoli z následujících způsobů, podle vhodnosti nebo snadnosti. Ukážeme jednotlivé možnosti na jednoduchém příkladu, kdy chceme hodnotám proměnné x z množiny D přiřadit jejich druhé mocniny. Zvolme pro náš příklad definiční obor výčtem, například

$$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Nyní zadáme předpis:

- Zadání slovním popisem: Předpis f přiřazuje každé z hodnot $x \in D$ její druhou mocninu.
- Zadání vzorcem: Jednoduchý vzorec $y = x^2$ pro $x \in D$ zadává zobrazení

$$f : D \ni x \longrightarrow f(x) = x^2 \in \mathbf{R}.$$



Obr. 2.32 Tečna, pravá a levá tečna.

tj. definiční limita (2.19) je vlastní. Geometricky to znamená, že v bodě $\big[a, f(a)\big]$ lze ke grafu funkce sestrojit tečnu. Představa nám napovídá, že konstrukce tečny by nebyla možná, kdyby graf nebyl „hladký“, nebo dokonce kdyby nebyl spojitý (křivka grafu by byla v bodě a přerušená). Pak by jistě nešlo provést limitní přechod sečny v tečnu. Zkusíme se o správnosti této představy přesvědčit. Nechť tedy má funkce $f(x)$ v bodě a vlastní derivaci $f'(a)$. Platí

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a), \quad \text{pro} \quad x \neq a.$$

Funkce $f(x) - f(a)$ je součinem dvou funkcí, které mají v bodě a vlastní limitu. Konkrétně

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a), \quad \lim_{x\to a}(x - a) = 0.$$

Použitím pravidla pro limitu součinu funkcí z věty 2.1 dostáváme

$$\lim_{x\to a}\Big[f(x) - f(a)\Big] = 0 \implies \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě a skutečně spojitá. Toto tvrzení je natolik důležité, že je vyslovíme ve tvaru matematické věty.

Věta 2.3 (Derivace a spojitost): *Má-li funkce $f(x)$ v bodě $a \in D_f$ konečnou derivaci $f'(a)$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Samozřejmě, z existence vlastních derivací $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$ plyne spojitost funkce $f(x)$ v bodě a zprava, resp. zleva.

2.2.2 Graf funkce snadno a rychle

Učeně se tomu říká *vyšetřování průběhu funkce*, ve skutečnosti však jde opravdu o návod, jak na základě několika málo výpočtů derivací získat velmi rychlou a dost dobrou představu o tom, jak vypadá graf funkce v celém definičním oboru. Velmi stručně, ne dost korektně, ale zato docela názorně lze říci, že derivace funkce v daném bodě určuje rychlost změny funkční hodnoty. Znaménko derivace dává představu o sklonu grafu v daném bodě, tj. o tendenci grafu v okolí daného bodu stoupat nebo klesat.

Druhá derivace v tomto bodě již určuje, „jak rychle se mění změna“, a nese tak informaci o tom, zda se vzestup či pokles grafu urychluje nebo zpomaluje.

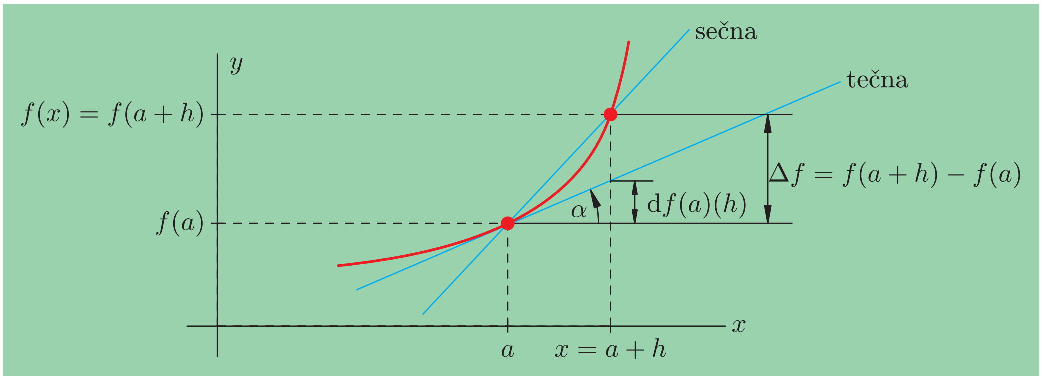
Představu o těchto pojmech můžeme získat pomocí ryze praktických věcí. Třeba na příkladě inflace a míry inflace. Posuzovanou funkcí nechť je nějaká veličina představující hodnotu přesně definované částky peněz, například koruny, v závislosti na čase. Její záporně vzatou derivací je veličina představující znehodnocení peněz, tedy míru inflace. Řekněme, že v jistém státě vydají oficiální zprávu o inflaci a v televizi řeknou, že *míra inflace* se snížila. Mohou se občané radovat, že jejich úspory nyní nabývají na hodnotě? Bohužel, nikoliv. Zpráva o snížení míry inflace znamená pouze to, že znehodnocování peněz pokračuje pomalejším tempem než dříve. Mazaní ekonomové využívají toho, že lidé nejsou zvyklí myslet v matematických pojmech, neuvědomí si, že míra inflace představuje derivaci veličiny, která je ve skutečnosti zajímá, a nechají se prohlášeními o poklesu míry inflace přesvědčit o tom, že se mají stále lépe.

Jiným příkladem je jízda automobilu. Posuzovanou funkcí je dráha automobilu v závislosti na čase $s = s(t)$, která stále narůstá. Jak jinak, když její derivace $v(t) = s'(t)$, udávající velikost rychlosti, je vždy kladná. Je-li kladné i zrychlení, určené derivací velikosti rychlosti $a(t) = v'(t)$, znamená to, že se automobil pohybuje rychleji a rychleji a uražená dráha roste s časem rychleji než lineárně. Automobil urazí za každou další sekundu více metrů než za sekundu předchozí. Naopak, je-li zrychlení záporné, velikost rychlosti klesá (rychlost sama je ovšem stále kladná) a uražená dráha sice stále narůstá, ale pomaleji. Automobil za každou další sekundu urazí menší vzdálenost než v sekundě předchozí.

Zabývejme se nyní již chováním grafu funkce. Pojmy funkce rostoucí a klesající jsme v odstavci 2.1.4 definovali pro intervaly. Pojem funkce rostoucí nebo klesající v bodě je definován pomocí okolí. Řekneme, že funkce $y = f(x)$ *v bodě a roste*, resp. *klesá*, jestliže existuje interval $J(\delta) = (a - \delta, a + \delta)$ takový, že v něm funkce roste, resp. klesá. Číslo δ může být i hodně malinkaté, podstatné však je, že *existuje*. Předpokládejme, že funkce má v bodě a derivaci $f'(a)$. Z definice těchto pojmů a z definice derivace funkce v bodě vyplývá, že při kladné derivaci funkce v bodě a roste, při záporné klesá. Je to také názorné i geometricky: Tečna ke grafu rostoucí funkce svírá s osou x ostrý úhel, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f'(a) > 0$, tečna ke grafu funkce klesající pak úhel tupý, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f'(a) < 0$. A co když je derivace $f'(a)$ nulová? Pak se bod a nazývá *stacionárním bodem*. Rozlišujeme tři typy stacionárních bodů: *lokální maximum*, *lokální minimum* a *inflexní bod typu a)*. Ve všech je ovšem derivace $f'(a) = 0$. Obr. 2.35 ukazuje všechny možné situace. Jejich souhrn bude za chvíli uveden v tabulce. (K té je koneckonců možné

2.2.3 Spokojíme se i s přibližnou hodnotou — diferenciál funkce

Pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a názorně ukazuje obrázek 2.38. Předpokládejme, že ke grafu funkce lze v jeho bodě $\big[a,\ f(a)\big]$ sestrojit tečnu. Uvažujeme o grafu funkce $f(x)$ v intervalu $[a,\ a+h]$, kde h je *přírůstek* proměnné x. *Přírůstek funkční hodnoty* neboli *diference* funkce $f(x)$ mezi body $x = a$ a $x = a+h$ je $\Delta f = f(a+h)-f(a)$. Diferenci lze „složit“ sečtením přírůstku na tečně, který je v obrázku vyznačen symbolem $\mathrm{d}f(a)(h)$, a hodnoty $\chi_a(h)$, kterou lze považovat za funkční hodnotu jisté funkce χ_a v bodě h. Platí



Obr. 2.38 Diferenciál funkce v daném bodě.

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \chi_a(h) = h\,\mathrm{tg}\,\alpha + \chi_a(h) = f'(a)\,h + \chi_a(h). \tag{2.25}$$

Přírůstek na tečně, který můžeme také psát ve tvaru

$$\mathrm{d}f(a)(x-a) = f'(a)(x-a), \tag{2.26}$$

je lineární funkcí proměnné $h = x - a$ a nazývá se *diferenciálem funkce* $f(x)$ *v bodě* a. Pokud existuje v bodě a derivace $f'(a)$, lze diferenciál definovat. Jaký je jeho význam poznáme, když prošetříme chování funkce $\chi_a(h)$ v okolí hodnoty $h = 0$. Platí

$$\chi_a(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)\,h \quad\Longrightarrow\quad \frac{\chi_a(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\,.$$

Limita pravé strany této rovnosti pro $h \to 0$ zjevně existuje a je rovna nule. Proto také

$$\lim_{h\to 0} \frac{\chi_a(h)}{h} = 0\,.$$

Co znamená tento výsledek? Budeme-li snižnovat hodnotu h, budou se k nule blížit nejen funkční hodnoty funkce $\chi_a(h)$ samotné, ale dokonce i hodnoty získané jejich podělením malým číslem h! S klesající hodnotou h jde tedy funkce χ_a k nule rychleji než úměrně h. Protože ovšem diferenciál je hodnotě h přímo úměrný, můžeme usoudit, že pro velmi malé h je jeho příspěvek ke změně funkční hodnoty podle vztahu (2.25) podstatný, zatímco příspěvek $\chi_a(h)$ je zanedbatelný. Přibližně bychom tedy mohli diferenci $f(a+h)-f(a)$ nahradit diferenciálem $f'(a)h$ a hodnotu $\chi_a(h)$ považovat za chybu, které se touto náhradou dopouštíme.

Pozn.: Jistě není třeba zdůrazňovat, že diferenciál je přesně definovaným matematickým objektem, přestože se využívá k přibližnému stanovení funkčních hodnot a k aproximacím funkcí. Je lineární funkcí určenou sklonem grafu funkce $f(x)$ v konkrétním bodě a.

Příklad 2.45: Přibližné určení funkční hodnoty

Jak můžeme přibližně určit například hodnotu $\sqrt[3]{7{,}94}$? Tato hodnota bude jistě blízká dvěma, neboť $\sqrt[3]{8}=2$. Uvažme proto funkci

$$f(x)=\sqrt[3]{x},\ f(8)=2 \quad \text{a položme} \quad a=8,\ h=-0{,}06\,.$$

Přibližně platí

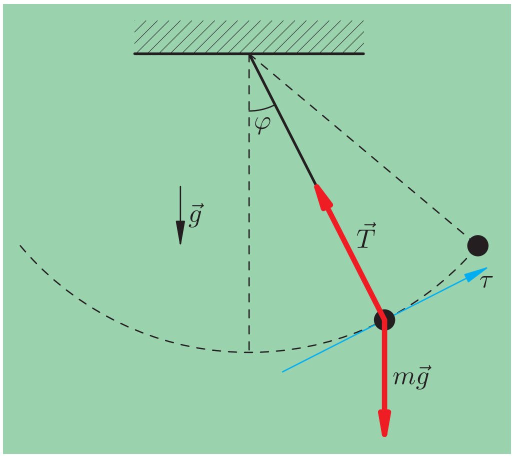
$$f(a+h)-f(a)\doteq f'(a)h \implies \sqrt[3]{7{,}94}-\sqrt[3]{8}\doteq \frac{1}{3}\,8^{-2/3}\cdot(-0{,}06)\doteq -0{,}005 \implies \sqrt[3]{7{,}94}\doteq 1{,}995\,.$$

Na kalkulačce zjistíme, že přesnější hodnota je například 1,994 987 448.

Diferenciál ovšem nepotřebujeme jen proto (a ani hlavně proto), že občas zapomeneme kalkulačku a potřebujeme znát nějaké číselné hodnoty. Velmi často pomůže při obecných aproximativních postupech, kdy chceme nahradit funkci $f(x)$ funkcí lineární.

Příklad 2.46: Matematické kyvadlo

Matematickým kyvadlem rozumíme malou kuličku o hmotnosti m zavěšenou v homogenním tíhovém poli $\vec{g}$ na nepružném (nenatahovacím) vlákně délky ℓ a zanedbatelné hmotnosti. Kulička je uvedena do pohybu tak,



Obr. 2.39 Matematické kyvadlo.

aby se pohybovala ve svislé rovině xy. Její trajektorií je oblouk kružnice o poloměru ℓ. Pohyb je v závislosti na čase popsán úhlovou výchylkou $\varphi(t)$, tj. úhlem, který svírá vlákno v okamžiku t se svislým směrem $\vec{g}$. Na kuličku působí svislá tíhová síla $m\vec{g}$ a tahová síla vlákna $\vec{T}$, odpor prostředí zanedbáváme. Složka zrychlení ve z funkce $f(x)$ *v mezích* $[a,\,b]$ pomocí takzvané *Leibnizovy–Newtonovy formule* jako

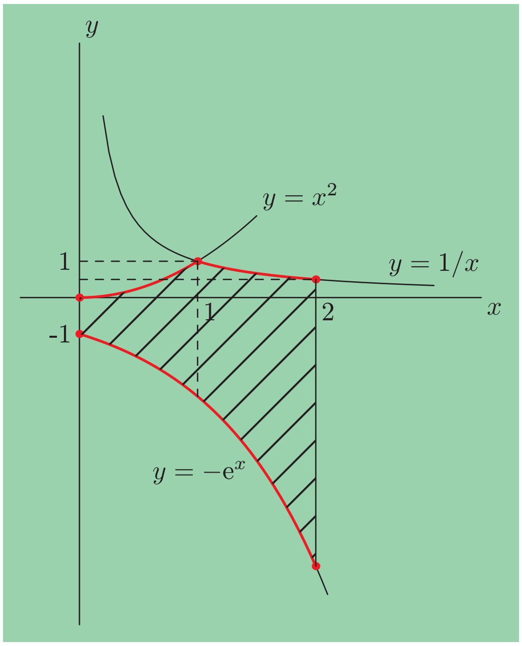
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.48}$$

Příjemnou vlastností tohoto výsledku je, že dává stejnou hodnotu pro všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$. Ty se sice mohou lišit o konstantu, v rozdílu $F(b) - F(a)$ se však tato konstanta nakonec neprojeví, vyruší se. Co však vztah (2.48) znamená? A jak je vůbec určitý integrál definován? Je vztah (2.48) jeho definicí, nebo je důsledkem nějaké jiné definice, vybudované třeba na základě geometrických úvah? Pravá podstata integrování je skutečně jinde než ve vztahu (2.48), i když bezprostřední souvislost s primitivní funkcí zde existuje. Myšlenka integrování opravdu vzešla z geometrických požadavků, konkrétně požadavku zjišťování délek, obsahů a objemů geometrických útvarů. V současné době existuje celá řada typů určitých integrálů. Nejnázornější z nich je *Riemannův integrál*, kterým se budeme v tomto odstavci zabývat.

2.3.1 Plocha pod grafem dlážděná proužky

Riemannův integrál z funkce $f(x)$ na intervalu $[a,\,b]$ lze definovat obecněji, než to nyní učiníme my. Pro geometrické, fyzikální či jiné přírodovědné aplikace totiž postačí uvažovat o spojitých funkcích na intervalu $[a,\,b]$, zatímco obecná definice pracuje s funkcemi, které nutně nemusí být spojité.

Formulujme nyní geometrický problém, který je základem definice integrování. Nechť je funkce $f(x)$ (integrovaný objekt) spojitá na (uzavřeném) intervalu $[a,\,b]$ (integrační obor). Graf této funkce spolu s přímkami o rovnicích $x = a$ a $x = b$ a osou x vymezí v souřadnicové rovině xy rovinný útvar (obr. 2.47). Pro lepší názornost předpokládejme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $[a,\,b]$ nezáporná a útvar tak celý leží v horní polorovině roviny xy. Chceme zjistit obsah tohoto útvaru. (Intuitivní představa nám říká, že v případě spojitého grafu funkce $f(x)$ bude určitě možné našemu obrazci obsah přisoudit. I když toto přesvědčení musíme teprve matematicky dokázat, uvažujme prozatím tak, jako kdyby bylo oprávněné.) Z elementární geometrie známe nějaké vzorce pro výpočet obsahů (obdélník, trojúhelník, lichoběžník, kruh). Jak jich ale využít pro řešení našeho problému a zjistit obsah útvaru alespoň přibližně? Asi nás hned napadne nakreslit útvar třeba na milimetrový papír a spočítat všechny čtverečky o obsahu $1\,\mathrm{mm}^2$, které se do útvaru vejdou. Uvědomíme-li si, že náš útvar není zcela obecný, ale je omezen hned třemi přímkovými úseky a teprve čtvrtý je obecnou křivkou, vidíme, že takové „měření“ lze velice zjednodušit. Nakreslíme útvar na milimetrovou síť tak, aby osa x splývala se stranou některé řady čtverečků. Pak stačí jen sečíst obsahy sloupečků, obdélníků s milimetrovou podstavou, které jsou v obrazci obsaženy. Dostaneme tak obsah obrazce poměrně přesně. A právě taková je myšlenka integrování. Poněkud obecnější situaci, kdy proužky nemají stejně velkou podstavu, ukazuje obrázek 2.47. V obrázku je na ose x vyznačeno *dělení* intervalu $[a,\,b]$. Je to soubor



Obr. 2.50 Obrazec omezený několika grafy.

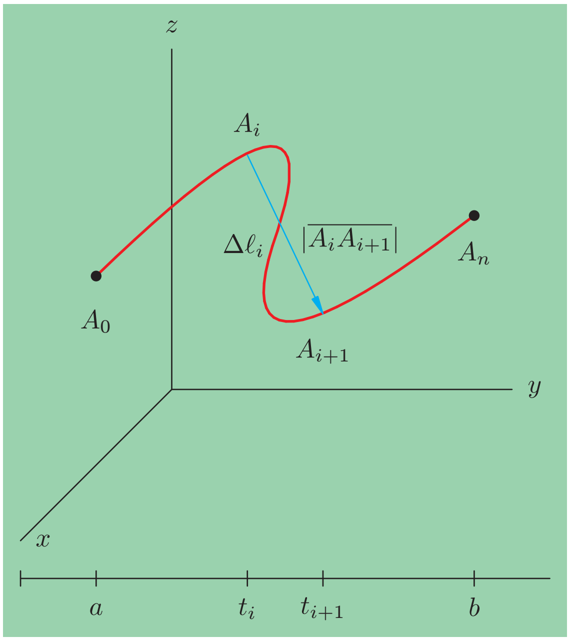
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \mathrm{e}^x\right]_0^1 + [\ln x + \mathrm{e}^x]_1^2 = \frac{1}{3} + \mathrm{e} - 1 + \ln 2 + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} = \mathrm{e}^2 + \ln 2 - \frac{2}{3}\,.$$

Zkusme si nyní rovinný obrazec představit jako hmotné těleso, třeba kus vystřiženého plechu. Předpokládejme nejprve, že materiál je homogenní, tj. všechny kousky materiálu o jednotkové ploše, ať jsou vystřiženy z kteréhokoli místa, mají stejnou hmotnost. Hmotnost plošné jednotky materiálu nazýváme *plošnou hustotou*, zadáváme ji v $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ a značíme třeba σ. Z fyzikálních důvodů je třeba požadovat, aby $\sigma > 0$. Pokud bychom chtěli popisovat pohyb takového hmotného rovinného útvaru, zjistili bychom, že pro tento popis jsou důležité následující fyzikální charakteristiky, související s rozložením hmotnosti útvaru: celková *hmotnost*, poloha *těžiště* (též *středu hmotnosti*) a *momenty setrvačnosti* vzhledem k různým osám, kolem kterých může těleso rotovat. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že obrazec je omezen osou x, přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafem spojité nezáporné funkce $f(x)$.

Hmotnost rovinného obrazce

Celkovou hmotnost homogenního tělesa určíme snadno. Dostaneme ji jako součin plošné hustoty a obsahu obrazce:

$$\mu = \sigma P = \sigma \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 2.56 Ke křivkovému integrálu.

Celková délka lomené čáry složené z úseků $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$ je

$$\mathcal{L}(D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\Big)^2 + \Big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\Big)^2 + \Big(z(t_{i+1}) - z(t_i)\Big)^2}\,.$$

Kdo očekává, že pro normu dělení D jdoucí k nule bude limita této veličiny představovat délku oblouku $\mathcal{C}$, nemýlí se. Jistě nakonec půjde o nějaký integrál. Měli bychom tedy umět představit si délku $\mathcal{L}(D)$ jako součet určitého typu pro vhodnou funkci $f(t)$ a dělení D.

Protože jsme předpokládali, že funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou na intervalu $[a,\, b]$ nejen spojité, ale dokonce mají i derivaci (zatím ještě nepotřebujeme předpoklad, že i derivace jsou spojité), můžeme pro ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z odstavce 2.1.7 (věta 2.2). V každém z intervalů $(t_i,\, t_{i+1})$ existuje alespoň jedna trojice čísel ξ_i, η_i a ζ_i takových, že platí

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i), \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= z'(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Délku úsečky mezi body A_i a A_{i+1} můžeme proto zapsat ve tvaru

$$\sqrt{\Big(x'(\xi_i)\Big)^2 + \Big(y'(\eta_i)\Big)^2 + \Big(z'(\zeta_i)\Big)^2}\,(t_{i+1} - t_i)\,.$$

Všimněme si, že pro každou z funkcí $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ je bod v intervalu $(t_i,\, t_{i+1})$, pro který je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se sečnou spojující krajní body grafu v tomto intervalu, obecně

Kapitola 3

I náhoda má své zákonitosti aneb počet pravděpodobnosti

Slovo pravděpodobnost používáme velmi často. Jaký však je jeho přesný význam? Jsme přesvědčeni, že pravděpodobnost výhry ve sportce je velmi malá. Ani pravděpodobnost, že se vyplní předpověď počasí, nepovažujeme mnohdy za výraznou. Přesto je mezi oběma příklady obrovský kvantitativní rozdíl. Zkusme význam pojmu pravděpodobnost ukázat pomocí konkrétních číselných příkladů.

Příklad se střelcem: Sportovní střelec střílí na terč série 100 ran. Předpokládejme, že podmínky při střelbě jsou stále stejné. Stejná je zbraň, terč, vzdálenost, povětrnostní podmínky i momentální zdravotní stav střelce. Při hodnocení střelcova „mistrovství“ někdo řekne, že střelec zasáhne terč *s pravděpodobností* 92%. Jak tomu rozumět? Znamená to, že v souboru sérií výstřelů jsou velmi časté ty, v nichž zasáhl střelec terč 92-krát. Samozřejmě, není řídké, že se objeví i série s 93 nebo 94 zásahy, ale také s 91 nebo 90. Vyloučen není ani případ s úspěšností 96 či 88, a dokonce i stovku bychom mohli zaznamenat. Situace výrazně odlišné od 92 zásahů však budou řídké, a to tím více, čím více se úspěšnost série liší od 92 oběma směry.

Příklad se zmetky: Koupíte si výrobek u firmy, o které je známo, že vyrábí zmetky s pravděpodobností 0,16%? Situaci lze posuzovat obdobně jako úspěšnost střelce. Budeme-li například zkoumat série obsahující 1 000 výrobků, bude každá z nich obsahovat „v průměru“ 16 zmetků. Z příkladu se střelcem již zhruba víme, jak posuzovat slovo *v průměru*.

V této kapitole se budeme pravděpodobnostmi zabývat podrobněji. Zjistíme, že i když se týkají náhodných jevů, platí i pro ně jisté zákonitosti.

3.1 Pravděpodobnost

V úvodních příkladech jsme si vyložili, jak intuitivně chápat pojem pravděpodobnost. Jednalo se v nich o posouzení průměrné úspěšnosti ve velkém souboru operací či úkonů prováděných za stejných podmínek, šlo tedy o jakousi „průměrnou“ pravděpodobnost. Nyní definujeme pravděpodobnost matematicky.

3.1.1 Co se pravdě podobá — definice pravděpodobnosti

Pro definici pravděpodobnosti použijeme pojmu *náhodný pokus*, jehož význam si ukážeme na příkladu. Dobrým příkladem náhodných pokusů je třeba házení mincí, hrací kostkou, výběr karet z balíčku, vidíme-li pouze jejich rub, apod. Budeme třeba házet kostkou. Abychom si situaci zbytečně nekomplikovali, budeme předpokládat, že všechny výsledky hodu kostkou (náhodné pokusy) jsou stejně časté, žádný z nich není nijak preferován. Kostka by tedy měla být homogenní, plocha, na kterou po hodu dopadne, vodorovná, kvalita povrchu všech stěn kostky stejná (žádná stěna by třeba neměla být natřena lepidlem), apod. Počet možných výsledků jednotlivého hodu je $N = 6$ (kostka má 6 stěn, na každé je vyznačen odlišný počet ok, tedy 1 až 6). Jednotlivé situace, které mohou nastat, nazýváme *náhodnými jevy*. Náhodným jevem A tak může být situace „padne číslo 2“, jiným náhodným jevem B situace „padne číslo dělitelné třemi“, apod. Počet situací, kdy výsledek hodu lze hodnotit tak, že určitý jev nastal, označíme M. Například pro jev A „padne číslo 2“ je $M(A) = 1$, pro jev B „padne číslo dělitelné třemi“ je $M(B) = 2$ (počet ok 3 nebo 6). Můžeme také definovat jev O „nepadne žádné číslo“ ($M(O) = 0$) nebo jev J „padne jakékoli číslo“ ($M(J) = 6$).

Pravděpodobností jevu rozumíme podíl

$$p = \frac{M}{N} = \frac{\text{počet případů příznivých}}{\text{počet případů možných}}. \tag{3.1}$$

Počtem případů možných jsme zkráceně nazvali počet všech možných výsledků náhodného pokusu, počtem případů příznivých pak počet všech takových výsledků pokusu, při nichž daný jev nastal.

Je zřejmé, že hodnota pravděpodobnosti jakéhokoli jevu je nezáporná a může nabývat hodnoty nejvýše 1, tj. $0 \le p \le 1$. Jev s nulovou pravděpodobností se nazývá *nemožný*, jev s jednotkovou pravděpodobností je *jistý*. V našem příkladu s kostkou tak dostáváme

$$p(A) = \frac{1}{6}, \quad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p(O) = 0, \quad p(J) = 1\,.$$

Jev O je tedy nemožný, jev J je jistý.

Příklad 3.1: Barevné ponožky

V zásuvce jsou ponožky tří barev. Červené (Č), zelené (Z) a modré (M). Je jich tam od každé barvy hodně. Student jde na schůzku a chce si vzít čisté ponožky. Náhle zhasne světlo. Student vytáhne potmě dvě ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že ponožky budou mít stejnou barvu? Vyjmenujme případy, které mohou při vytažení dvou ponožek nastat: (Č+Č), (Č+Z), (Z+Č), (Č+M), (M+Č), (Z+Z), (Z+M), (M+Z), (M+M). Je tedy $n = 9$. Příznivé situace jsou tři, (Č+Č), (Z+Z), (M+M). Pravděpodobnost je tedy 1/3.

3.2.1 Jak dobrý je to střelec — diskrétní rozdělení

Mimořádně vhodnou ukázkou náhodné veličiny je příklad se sportovním střelcem, kterým jsme uvedli celou kapitolu o pravděpodobnostech.

Příklad 3.18: Ještě jednou střelba, tentokrát přesněji

Názvem pochopitelně nemyslíme přesnější střelbu, ale přesnější komentář, který již bude založen na našich znalostech o pravděpodobnosti. Dejme tomu, že podmínky střelby jsou pevně dány a nemění se. Patří k nim zcela jistě typ zbraně, typ terče, vzdálenost stanoviště střelce od terče, základní povětrnostní podmínky. Výsledky jsou pak závislé na zručnosti střelce, avšak jsou ovlivněny náhodnými vlivy (foukne nenadálý vítr, střelec se lekne, zatřese se mu ruka, náhodně se mírně pozmění vzdálenost ústí hlavně od terče nebo její sklon, apod.). Počty dosažených bodů daného střelce při jednom výstřelu, nebo při sérii deseti výstřelů, atd., jsou tedy náhodnými veličinami. Pokusme se posoudit zručnost střelce přesněji. Označme jako náhodnou veličinu X počet bodů dosažených při jednom výstřelu. Nejprve určeme, jakých hodnot může nabývat. Všichni víme, jak vypadá běžný střelecký terč. Aby však naše počty nebyly příliš komplikované a zdlouhavé, uvažujme o terči mnohem jednodušším. Bude tvořen vnitřním černým kruhem s hodnotou 3 body, dále středním šedivým mezikružím s hodnotou 2 body a vnějším bílým mezikružím s hodnotou 1 bod. Střelba do terče mimo vnější kružnici nebo zcela mimo terč představuje bodovou hodnotu 0. Při jednom výstřelu tedy může střelec docílit v principu jakékoli z možných hodnot

$$X \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Informace, jakých hodnot může náhodná veličina nabývat, je jistě nejen cenná, ale je pro jakékoli další úvahy nezbytná. Sama o sobě je však nepostačující. O střelcově zručnosti se na základě konstrukce terče nic nedovídáme. Kvalitativně jinou informaci získáme, víme-li, že možných hodnot zásahu dociluje střelec s následujícími pravděpodobnostmi:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,03	0,28	0,52	0,17

Můžeme tak třeba zjistit, kolika bodů střelec zhruba docílí s vysokou pravděpodobností při pěti výstřelech. Tento počet je

$$5 \cdot (0{,}03 \cdot 0 + 0{,}28 \cdot 1 + 0{,}52 \cdot 2 + 0{,}17 \cdot 3) = 5 \cdot 1{,}83 = 9{,}15 \doteq 9\,.$$

Pro každou pětici výstřelů může být počet dosažených bodů samozřejmě poněkud odlišný. Veličina Y představující počet dosažených bodů na pět výstřelů je rovněž veličinou náhodnou. Je nám však jasné, že hodnota dosažených bodů v každé pětici výstřelů je s vysokou pravděpodobností blízká číslu 9. Co to znamená „s vysokou pravděpodobností“? Dokážeme ji spočítat? Pokusme se o to. Především bychom museli určit, o kolik bodů se smí dosažený počet lišit od hodnoty 9, abychom jej ještě považovali za „blízký číslu 9“. Tato volba závisí čistě na naší vůli a bude jí odpovídat i vypočtená pravděpodobnost. Dejme tomu, že zvolíme tento interval od 7 do 11 bodů včetně. Jev, jehož pravděpodobnost hledáme, je tedy

A : Při pěti výstřelech získá střelec 7 nebo 8 nebo 9 nebo 10 nebo 11 bodů.

Jevy

A_j : Střelec získá při pěti výstřelech j bodů.

jsou po dvou neslučitelné, pravděpodobnost jevu A tedy bude rovna součtu pravděpodobností

$$p(A) = \sum_{j=7}^{11} p(A_j)\,.$$

Po substitucích $mv_i^2/2kT = u^2$, $i = x, y, z$ vede výpočet na Laplaceův integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

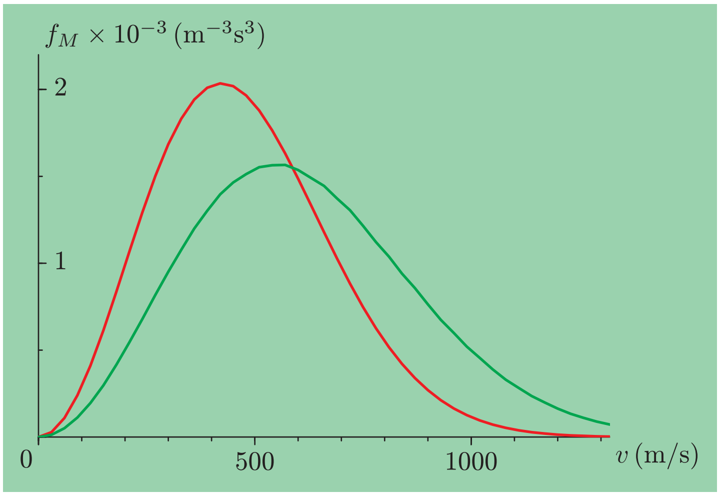
Dostáváme

$$C = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \Delta P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Hustota pravděpodobnosti je stejná pro všechny koncové body vektoru rychlosti $\vec{v}$ ležící v rychlostním prostoru na kulové ploše o poloměru rovném velikosti rychlosti v. Jaká bude elementární pravděpodobnost $\Delta\mathcal{P}(v)$, že molekula má velikost rychlosti v intervalu $(v,\, v + \Delta v)$ bez ohledu na směr pohybu? Tuto pravděpodobnost dostaneme, vezmeme-li za $\Delta\Omega$ objem tenké kulové slupky o poloměru v a tloušťce Δv, v níž končí všechny vektory rychlosti, jejichž velikost leží v požadovaném intervalu. Tento objem je $\Delta\Omega = 4\pi v^2\, \Delta v$ a

$$\Delta\mathcal{P}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \Delta v = f_M(v) \Delta v.$$

Dokážete vyložit, proč jsme zvolili za $\Delta\Omega$ celý objem slupky? Počítáme totiž pravděpodobnost, že koncový bod vektoru rychlosti molekuly leží, zhruba řečeno, v kterémkoli elementárním kvádříku $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ obsaženém ve slupce. A ta je součtem pravděpodobností odpovídajících všem kvádříkům vytvářejícím slupku. Jedná se o pravděpodobnosti navzájem neslučitelných jevů (pohybuje-li se molekula v jednom směru, nepohybuje se v jiném). Hustota této pravděpodobnosti se nazývá *Maxwellovo rozdělení rychlostí*. Na rozdíl od Gaussova



Obr. 3.5 Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul dusíku pro teploty $T_1 = 300$ K a $T_2 = 500$ K.

rozdělení, popisujícího hustotu pravděpodobnosti pro jednotlivé složky rychlosti, je nesymetrická vlivem faktoru v^2. Obrázek 3.5 ukazuje funkci $f_M(v)$ pro dvě různé teploty $T_2 > T_1$. Důležité hodnoty spjaté s tímto rozdělením jsou *nejpravděpodobnější rychlost* v_p, *střední rychlost* $\langle v \rangle$ a *střední kvadratická rychlost* $\langle v^2 \rangle$. Platí

$$\frac{\mathrm{d}f_M}{\mathrm{d}v} = 0 \longrightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

$$\langle v \rangle = \int\limits_0^{\infty} v f_M(v)\, \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

Dodatek K

Ještě něco o integrálech

Pečliví čtenáři si všimli, že v odstavci 3.2.2 figurují objekty, které nebyly podrobně zavedeny. Při jejich použití se postupovalo poněkud intuitivně. Jedná se o integrály typu

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na str. 240 se to jimi doslova hemží. Jsou to takzvané *nevlastní integrály.* (Jde o obdobnou terminologii, jakou jsme používali u nevlastních limit funkcí nebo limit v nevlastních bodech.) Nejde, přesně řečeno, o určité integrály, jak jsme je zavedli v odstavci 2.3.1 — tam jsme definovali určitý integrál pro spojitou funkci zadanou na uzavřeném intervalu $[a, b]$, jímž žádný z intervalů $(-\infty,\, a]$, $[b,\, \infty)$ a $(-\infty,\, \infty)$ bezesporu není. Plně korektní rozšíření definice integrálu i na tyto intervaly (ale i na intervaly otevřené, popřípadě na funkce „do jisté míry“ nespojité) způsobem použitým v odstavci 2.3.1 by vyžadovalo zavedení nových pojmů, které nemohou být předmětem pouhého dodatku. Přesto je třeba, abychom s nevlastními integrály uměli počítat — vždyť mají značné uplatnění v aplikacích.

Nevlastní integrály jsou dvojího typu — zavádí se jednak pro nevlastní definiční intervaly $(-\infty,\, a]$, $[b,\, \infty)$ a $(-\infty,\, \infty)$, jednak pro funkce definované na uzavřených intervalech $[a,\, b\,]$, které však mohou v některých bodech porušovat podmínku spojitosti s tím, že v okolí bodů nespojitosti mohou být dokonce i neomezené. Obojí typ integrálu lze pak samozřejmě kombinovat.

Rozšíření definice integrálu

Než přistoupíme k definování nevlastních integrálů, rozšíříme definici určitého integrálu na intervalu $[a,\, b\,]$ i na funkce, které nutně nemusejí být spojité. (Poznamenejme, že historicky vybudoval pojem určitého integrálu ze spojité funkce na uzavřeném intervalu Cauchy. V odstavci 2.3.1 jsme však použili v praxi běžnějšího názvu „Riemannův integrál“. To proto, že integrál, který zavedl Riemann obecněji, aniž požadoval spojitost funkce, splývá pro spojité funkce s integrálem Cauchyovým.)

Nyní zavedeme určitý integrál pro funkce, o nichž předpokládáme prozatím jen to, že jsou na intervalu $[a,\, b\,]$ ohraničené. Spojitost nebudeme předem vyžadovat — uvidíme později, nakolik z ní opravdu lze „slevit“. Zvolme dělení D intervalu $[a,\, b\,]$, jak bylo definováno v odstavci 2.3.1. Protože funkce $f(x)$ není na intervalech $[x_i,\, x_{i+1}]$ nutně spojitá, není zaručeno, že na nich nabývá svého minima a maxima. Je však jisté, že množina funkčních hodnot je na každém z uvedených intervalů ohraničená, existuje tedy její infimum m_i a supremum M_i. Horní a dolní součty pro funkci $f(x)$ a dělení D zavedeme formálně stejně jako ve vztahu (2.49), pouze integrační obor znamená „nekonečně dlouhou“ základnu obrazce, neomezenost funkce zase připouští, že obecně se měnící „výška“ obrazce je nad některými body základny „nekonečně velká“. Na příkladu takových integrálů se ukáže, jako se při výkladu pojmů matematické analýzy již několikrát stalo, že „názorná představa“ o těchto pojmech je sice často ku pomoci, v některých případech však bývá klamná. Situace, kdy obrazce s „nekonečnými základnami“ nebo obrazce omezené neohraničenými funkcemi mají konečný plošný obsah, jsou v jistém smyslu analogické situacím, kdy součet nekonečně mnoha členů nějaké řady (třeba dobře známé řady geometrické, jíž jsme se zabývali v odstavci 2.1.6), je „rozumné“ číslo.

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definována na množině $[a,\, b]\setminus\{c\}$, kde $c \in (a,\, b)$, je neohraničená na okolí bodu c, a že pro každé $\delta > 0$, $a < c - \delta$, $c + \delta < b$ existují integrály

$$\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Existují-li obě limity

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a jsou-li vlastní, nazýváme jejich součet *nevlastním integrálem* (prvního druhu) z funkce $f(x)$ na intervalu $[a,\, b]$. Značíme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Říkáme také, že uvedený integrál *konverguje*. V opačném případě říkáme, že *diverguje*.

Může se stát, že jednotlivé limity integrálů z předchozí definice nemusí existovat, může však existovat limita součtu těchto integrálů pro $\delta \to 0$. Dostáváme tak poněkud slabší definici nevlastního integrálu, tzv. integrálu *ve smyslu hlavní hodnoty*.

Z definic je zřejmé, že konverguje-li daný integrál, konverguje také ve smyslu hlavní hodnoty. Opačné tvrzení neplatí. Na následujícím příkladu ukážeme způsob výpočtu a podstatu odlišnosti obou definic.

Příklad K.3: Výpočet hlavní hodnoty integrálu

Funkce $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$, znázorněná na obrázku K.2, je na intervalu $[-1,\, 1]$ dokonce spojitá, s výjimkou bodu $c = 0$, v němž není definována.

I kdybychom ji dodefinovali jakoukoli hodnotou, bude v bodě $c = 0$ nespojitá a v okolí tohoto bodu

Dodatek N

Ještě jednou průměry

V příkladu 3.25, který se zabýval interpretací výsledků studentské předmětové ankety, jsme si mohli všimnout různého pojetí pojmu „průměr“. První způsob zjištění „fakultního průměru“ při hodnocení určitého aspektu výuky daného předmětu byl založen na výpočtu aritmetického průměru všech *jednotlivých* hodnocení, tj. hodnocení tohoto aspektu jednotlivými studenty bez rozlišení předmětů. Druhý typ fakultního průměru byl určen jako střední hodnota průměrných hodnocení jednotlivých předmětů. Přestože jsme v příkladu zdůvodnili relevantnost druhého způsobu stanovení fakultního průměru, má i první pojetí své oprávnění, avšak v poněkud jiných případech, než byl ten náš s anketou. Slovo „průměr“ lze totiž použít v mnoha významech, vždy však musí být přesně definováno, jaký „průměr“ máme na mysli. Je třeba přiřadit tomuto slovu správný přívlastek. Průměr s přívlastkem? To se může jevit jako poněkud překvapivé, většina lidí si totiž pod pojmem „průměr“ vybaví průměr aritmetický. Můžeme však skutečně hovořit nejen o průměru aritmetickém, ale i třeba geometrickém, harmonickém, kvadratickém, logaritmickém, apod. Používat termínu „průměr“ v nějakém „obecném smyslu“, jak mají lidé také často tendenci, nemá příliš význam, neboť pak není jasné, o co jde. Jak si třeba vysvětlit jistě dobře myšlená slova nějakého politika prosazujícího reformu výzkumu, když říká, že „…je třeba docílit toho, aby se průměrné výzkumné instituce staly nadprůměrnými a podprůměrné průměrnými…“? S jakým „průměrem“ je porovnává? Uvědomuje si, že s požadovaným zlepšením hodnocení výzkumných výsledků v mnoha institucích dojde i ke změně průměrné hodnoty veličiny, jíž úroveň výsledků institucí poměřujeme?

V ostavci 3.2 jsme hovořili o průměrech nebo středních hodnotách v souvislosti s náhodnými veličinami, tj. takovými, které nabývají jistých hodnot s jistými pravděpodobnostmi. Průměrné neboli střední hodnoty však mají smysl nejen v případech, kdy se jedná o požadavek charakterizovat — více či méně dokonale — jednou hodnotou náhodnou veličinu. Často se užívají i jako celkové, globální, charakteristiky veličin například geometrických nebo fyzikálních. Uvidíme, že mezi takovými případy a náhodnými veličinami je velmi těsná analogie.

Příklad N.1: Průměr vskutku vážený

V odstavcích 3.2.1 a 3.2.2, v nichž jsme se zabývali náhodnými veličinami s diskrétním a spojitým rozdělením, jsme definovali střední hodnotu takové veličiny jako *vážený aritmetický průměr* jejích hodnot, přičemž váha dané hodnoty veličiny s diskrétním rozdělením byla dána pravděpodobností, s jakou veličina této hodnoty nabývá — vztah (3.14), váha hodnot veličiny se spojitým rozdělením pak elementární pravděpodobností, že veličina nabude hodnoty v určitém intervalu — vztah (3.23). V tomto příkladu půjde také o vážený aritmetický průměr, nikoli však pro náhodnou veličinu.

Představme si zvláštní pohádku, v níž se vykrmený Jeníček o hmotnosti $m_J = 60$ kg a subtilní Mařenka o hmotnosti $m_M = 30$ kg chtějí houpat na kládě podepřené třeba pařezem. Kláda má délku $\ell = 4$ m a hmotnost $m_K = 60$ kg rozloženou rovnoměrně (říkáme, že kláda je homogenní). Za tohoto předpokladu můžeme tíhovou sílu, kterou na ni působí Země, umístit doprostřed (klády). Situaci znázorňuje obrázek. N.1. Jeníček s Mařenkou se nejprve rozhodli spočítat, v kterém místě mají kládu podepřít, aby se mohli pohodlně houpat, budou-li sedět na samých koncích klády. Na kládu s dětmi působí tíhové síly $\vec{G}_J = m_J\vec{g}$, $\vec{G}_M = m_M\vec{g}$ a $\vec{G}_K = m_K\vec{g}$ (velikost

Harmonický průměr hodnot x_1, x_2, ..., x_N počítáme podle vztahu

$$\langle x \rangle = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_N}}.$$

Příklad N.4: Úlohy o společné práci

Pro typickou školskou až školometskou úlohu ze základní nebo střední školy se vžil nesympatický název „úloha o společné práci“. Nemusí jít vždy o práci, podstatu úlohy lze opatřit i jiným slovním obalem, například tímto: Koza, zajíc a ovce se rozhodli, že sežerou všechny hlávky na zelném poli. Koza sama by vyplenila pole za $t_1 = 3$ dny, ovce za $t_2 = 4$ dny a zajíc za $t_3 = 6$ dní. Většinou se ptáme, ze jak dlouho bude pole hlávek prosté, pustí-li se do nich tato povedená trojice současně. My však otázku poněkud modifikujeme a zeptáme se, jak dlouho by trvalo sežrání všech hlávek pomyslnému „průměrnému“ býložravci — rozumí se, že tři takoví průměrní býložravci by zelí snědli za stejnou dobu, jako koza s ovcí a zajícem.

Řešení je zřejmé. Koza sežere za 1 den třetinu hlávek, ovce čtvrtinu a zajíc šestinu. Dohromady tedy za den snědí tři čtvrtiny počtu všech hlávek, neboť

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Označíme-li $\langle t \rangle$ dobu, za kterou by pole vyprázdnil průměrný býložravec, dostaneme harmonický průměr jednotlivých dob.

$$\langle t \rangle = \frac{3}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}} = \frac{12}{3} = 4 \text{ dny}.$$

Příklad N.5: Průměrná rychlost obecně

Pokusme se úlohu o průměrné rychlosti formulovat obecně tak, abychom z ní předchozí situace dostali jako speciální případy — vždyť přece jde stále o střední hodnotu nějaké veličiny, jednou jsou však zadány časové úseky, jindy dráhové. V příkladu N.3 jsme viděli, že při zadání časových úseků t_1, t_2, ..., t_N, v nichž se těleso pohybovalo stálými rychlostmi v_1, v_2, ..., v_N, byla průměrná rychlost dána váženým aritmetickým průměrem, váhy jednotlivých hodnot rychlosti byly úměrné délkám příslušných časových úseků. Při stejných časových úsecích přešel vážený aritmetický průměr v obyčejný. V případě spojitě proměnné rychlosti s časem jsme dostali integrální vyjádření, které není ničím jiným než také váženým průměrem, avšak pro veličinu se spojitým rozdělením.

Předpokládejme nyní, že místo časových úseků jsou zadány obecně různé úseky dráhové, s_1, s_2, ..., s_N, a odpovídající rychlosti v_1, v_2, ..., v_N. Doba trvání i-tého úseku je tedy $t_i = s_i/v_i$. Průměrná rychlost je

$$\langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \cdots + \frac{s_N}{v_N}} = \frac{1}{\frac{w_1}{v_1} + \frac{w_2}{v_2} + \cdots + \frac{w_N}{v_N}}, \quad \text{kde} \quad w_i = \frac{s_i}{s_1 + s_1 + \cdots + s_N}$$

opět hraje roli váhy i-té rychlosti, součet vah je přitom roven jedné. (Tato úloha má omezení — žádná rychlost nesmí být nulová. Zvažte, jak by bylo třeba vztah upravit, abychom dostali správnou hodnotu průměrné rychlosti, kdyby těleso po nějakou dobu někde stálo.)

Jestliže se rychlost mění spojitě, můžeme ji chápat jako funkci času $v = v(t)$, nebo jako funkci dráhy $v = v(s)$. V případě, že se těleso nikde na nějakou dobu nezastaví (v takovém případě by mělo v nenulovém časovém úseku nulovou rychlost), je závislost dráhy na čase $s = s(t)$ prostá funkce a můžeme k ní najít funkci inverzní $t = t(s)$. Celková doba pohybu a průměrná rychlost pak jsou, označíme-li jako σ celkovou dráhu,

$$\tau = \int\limits_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{\mathrm{d}s}{v\big[t(s)\big]} \Longrightarrow \langle v \rangle = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int\limits_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{1}{v\big[t(s)\big]}\,\mathrm{d}s}.$$

V případě rychlosti jako spojité funkce času nebo dráhy tedy dostáváme dva ekvivalentní vztahy pro průměrnou rychlost

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int\limits_{s_0}^{s_0+\sigma} \frac{1}{v\big[t(s)\big]}\,\mathrm{d}s}.$$

První variantu výpočtu průměrné rychlosti lze použít vždy, druhou pouze v případě, že závislost dráhy na čase je prostá funkce, těleso se nikde na určitou dobu nezastaví (okamžitá rychlost však v jednotlivém okamžiku nulová být může).

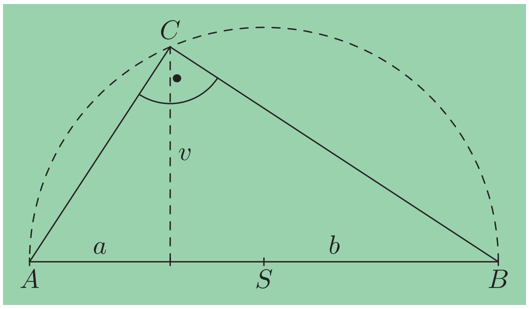
Všimněte si, že první výraz je „spojitou“ obdobou aritmetického průměru, zatímco druhý vypadá jako průměr harmonický. Dokážete vysvětlit, proč v případě spojitě proměnné rychlosti dávají tyto vztahy stejný výsledek, když pro případy diskrétní (pohyb v jednotlivých časových nebo dráhových úsecích danými rychlostmi) byly výsledky jasně odlišné?

Příklad N.6: Průměrný obdélník je čtverec

Název příkladu vypadá jako vtip. On to také trochu vtip je, i když nikoli bez věcné oprávněnosti. Jistě jste na základní škole dostali někdy za úkol zkonstruovat na základě zadaných stran a a b obdélníka čtverec se stejným obsahem. (Konstrukce na obrázku N.2 využívá Thaletovy kružnice, podle Euklidovy věty je strana hledaného čtverce výškou v pravoúhlém trojúhelníku, která, spuštěna z vrcholu C u pravého úhlu na protější stranu AB, rozdělí tuto stranu na úseky a a b.) Platí $v^2 = a \cdot b$. Čtverec, který může z hlediska obsahu „zastoupit“ zadaný obdélník, má stranu v. Úlohu lze zobecnit na N-rozměrný případ. Hledáme N-rozměrnou krychli, která má stejný objem jako N-rozměrný kvádr o stranách x_1, x_2, …, x_N. Její strana je zřejmě

$$v = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_N}.$$

Opět tu máme další druh průměru, tentokráte nazývaný *geometrickým průměrem.*



Obr. N.2 Euklidova věta a geometrický průměr.
