

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, pak $(A \cdot B)^T$ je rovno:

- a) $A \cdot B$ b) $B^T \cdot A^T$ c) $(B \cdot A)^T$ d) $A^T \cdot B^T$ e) $B^T + A^T$ (6 bodů)

2. Pro vektory $\vec{u} = (1, 0, -2)$ a $\vec{v} = (2, 1, 1)$ platí:

- a) jejich skalární součin je roven -1 b) jsou lineárně závislé c) mají stejnou velikost
d) jsou kolmé e) jsou stejné (6 bodů)

3. Vzdálenost bodů $A = [-1, 1, 1]$, $B = [2, 1, 5]$ je rovna:

- a) $\sqrt{17}$ b) 2 c) 5 d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{2}$ (6 bodů)

4. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1, 2)$ b) $(1, -1)$ c) $(1, 1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (6 bodů)

5. Přímky

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad q \equiv \begin{cases} x = 3 + 2s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

jsou:

- a) totožné b) různoběžné c) rovnoběžné různé d) kolmé e) mimoběžné (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{x+y^2}$, pak:

- a) $f''_{yx}(x, y) = e^{2y}$ b) $f''_{yx}(x, y) = 2y e^{x+y^2}$ c) $f''_{yx}(x, y) = e^{1+2y}$ d) $f''_{yx}(x, y) = (1 + 2y) e^{x+y^2}$
e) $f''_{yx}(x, y) = e^{x+y^2}$ (6 bodů)

7. Jestliže má funkce f spojitě parciální derivace 2. řádu v okolí svého stacionárního bodu $A = [x_0, y_0]$ a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$, pak v bodě A :

- a) nastává lokální minimum funkce f b) má funkce f globální maximum
c) lokální extrém funkce f nenastává d) nastává lokální maximum funkce f e) je inflexní bod (6 bodů)

8. Funkce $y(x) = x \ln x$ je řešením diferenciální rovnice:

- a) $y' = y + x$ b) $xy' = y + x$ c) $y'' = \frac{y+x}{x}$ d) $y' = \frac{y-x}{x}$ e) $y' = xy$ (6 bodů)

9. Neurčitý integrál $\int x e^x dx$ je roven:

- a) $(x + 1) e^x + c$ b) $\frac{x^2}{2} e^x + c$ c) $(x - 1) e^x + c$ d) $e^x + c$ e) $x - e^x + c$ (6 bodů)

10. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

- a) 4π b) 0 c) 2π d) π e) $-\pi$ (6 bodů)

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Uvažujme nosník trojúhelníkového průřezu. Ve zvoleném souřadném systému se jedná o pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 2]$. Určete kvadratický moment průřezu vzhledem k delší odvěsně daného trojúhelníka.

Nápověda: Kvadratické momenty průřezu vzhledem k souřadným osám jsou dány vztahy $J_x = \iint_{\triangle ABC} y^2 dx dy$ a $J_y = \iint_{\triangle ABC} x^2 dx dy$ (20 bodů)

12. Těleso kmitá podél osy y , přičemž jeho pohyb je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + 16y = 0.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete, v jaké poloze se bude těleso nacházet po 5 s pohybu, jestliže startuje z počáteční polohy $y = 2$ s nulovou počáteční rychlostí. (20 bodů)