

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Pro matici B , která vznikne z matice A vynásobením prvního řádku číslem -2 , platí:

- a) $\det A = -2 \det B$ b) $\det A = 2 \det B$ c) $B = -2A$ d) $\det B = 2 \det A$ **e) $\det B = -2 \det A$** (6 bodů)

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 1)$ a $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(0, 1, 1)$ **b) $(0, -1, 1)$** c) $(0, -1, -1)$ d) $(1, 0, -1)$ e) $(1, 0, 1)$ (6 bodů)

3. Vzdálenost bodů $A = [-3, 1, 1]$, $B = [1, 4, 1]$ je rovna:

- a) $\sqrt{13}$ **b) 5** c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{5}$ (6 bodů)

4. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

je:

- a) přímka $2x + 3y - 3 = 0$** b) přímka $2x - 3y + 3 = 0$ c) přímka $3x - 2y + 2 = 0$ d) kružnice
e) přímka $3x + 2y - 2 = 0$ (6 bodů)

5. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1, 2)$ **b) $(1, -1)$** c) $(1, 1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{x - \ln y}$, pak:

- a) $f''_{xx}(x, y) = e^x$ b) $f''_{xx}(x, y) = e^0$ c) $f''_{xx}(x, y) = y e^x$ **d) $f''_{xx}(x, y) = e^{x - \ln y}$**
e) $f''_{xx}(x, y) = (1 + 2y) e^{x - \ln y}$ (6 bodů)

7. Jestliže má funkce f spojitou derivaci 2. řádu v okolí svého stacionárního bodu x_0 a platí $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 :

- a) lokální minimum b) bod vratu c) inflexní bod d) globální maximum **e) ostré lokální maximum** (6 bodů)

8. Funkce $y(x) = x e^x$ je řešením diferenciální rovnice:

- a) $y' = y + e^x$** b) $y' = xy$ c) $xy' = y + e^x$ d) $y' = y - e^x$ e) $y'' = y + x$ (6 bodů)

9. Je-li $\Gamma = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0, y \in \langle -1, 0 \rangle\}$, pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} 1 ds$ je rovna:

- a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d) $\sqrt{2}$** e) $(1, 1)$ (6 bodů)

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

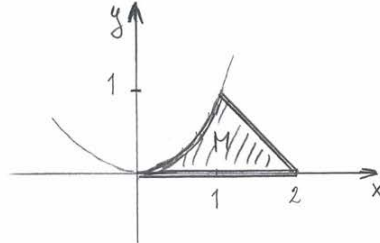
- a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$ b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varrho \right) d\varphi$ c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varphi \right) d\varrho$ **d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$** e) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho d\varphi \right) d\varrho$ (6 bodů)

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Načrtněte oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x^2 = y$, $x + y = 2$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)

Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx \right) dy = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y}) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{5}{6}.$$

12. Ochlazování malé kuličky (tj. změna její teploty T v čase) ponořené do lázně s konstantní teplotou 0°C je popsáno diferenciální rovnicí

$$T' = -\frac{1}{3} T.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete teplotu kuličky po 6 s ochlazování, jestliže na počátku byla teplota kuličky 30°C . (20 bodů)

Řešení:

Obecné řešení je tvaru

$$T(t) = c e^{-\frac{1}{3}t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

či

$$\ln |T| = -\frac{1}{3}t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínku

$$T(0) = 30,$$

odkud dostaneme

$$c = 30,$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$T(t) = 30 e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Po 6 s ochlazování bude teplota kuličky $T(6) = 30 e^{-2} \approx 4,06$.