Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

---

1. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, pak $(A \cdot B)^T$ je rovno:

a) $A \cdot B$ **b)** $B^T \cdot A^T$ **c)** $(B \cdot A)^T$ **d)** $A^T \cdot B^T$ **e)** $B^T + A^T$ (6 bodů)

---

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 1)$ a $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (v tomto pořadí) je:

a) $(0, 1, 1)$ **b)** $(0, -1, 1)$ **c)** $(0, -1, -1)$ **d)** $(1, 0, -1)$ **e)** $(1, 0, 1)$ (6 bodů)

---

3. Vzdálenost bodů $A = [-1, 1, 1]$, $B = [2, 1, 5]$ je rovna:

a) $\sqrt{17}$ **b)** 2 **c)** 5 **d)** $\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{2}$ (6 bodů)

---

4. Přímka v rovině procházející body $A = [2, 3]$ a $B = [0, 2]$ má rovnici:

a) $2x - y + 4 = 0$ **b)** $x + 2y + 4 = 0$ **c)** $x - 2y + 4 = 0$ **d)** $2x + y + 4 = 0$ **e)** $3x - 2y = 0$ (6 bodů)

---

5. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

a) $(1, -1, 2)$ **b)** $(1, -1)$ **c)** $(1, 1)$ **d)** $(1, 1, 0)$ **e)** $(0, 1)$ (6 bodů)

---

6. Je-li $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} \ln y$, pak:

a) $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^{1+y} \ln y$ **b)** $f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{y}\, \mathrm{e}^{x+y}$ **c)** $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ **d)** $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^{x} \ln y$

e) $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} \ln y$ (6 bodů)

---

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$, pak v bodě A:

a) nastává lokální mimimum funkce f **b)** má funkce f globální maximum **c)** je inflexní bod

d) lokální extrém funkce f nenastává **e)** nastává lokální maximum funkce f (6 bodů)

---

8. Funkce $y(x) = x\,\mathrm{e}^x$ je řešením diferenciální rovnice:

a) $y' = y + \mathrm{e}^x$ **b)** $y' = xy$ **c)** $xy' = y + \mathrm{e}^x$ **d)** $y' = y - \mathrm{e}^x$ **e)** $y'' = y + x$ (6 bodů)

---

9. Je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 0\}$, pak hodnota integrálu $\iiint\limits_A 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ je rovna:

a) 2 **b)** 6 **c)** 3 **d)** 0 **e)** 5 (6 bodů)

---

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint\limits_M (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi$ **b)** $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi$ **c)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho$ **d)** $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi$ **e)** $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \varrho \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\varrho$

(6 bodů)

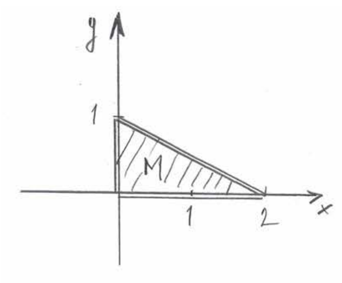
OTOČTE!

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Uvažujme nosník trojúhelníkového průřezu. Ve zvoleném souřadném systému se jedná o pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [2,0]$ a $C = [0,1]$. Určete kvadratický moment průřezu vzhledem k delší odvěsně daného trojúhelníka.
Nápověda: Kvadratické momenty průřezu vzhledem k souřadným osám jsou dány vztahy $J_x = \iint\limits_{\triangle ABC} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $J_y = \iint\limits_{\triangle ABC} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (20 bodů)

Řešení:



Buď

$$J_x = \iint\limits_M y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2y} y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 y^2(2-2y)\mathrm{d}y = 2\int\limits_0^1 (y^2 - y^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

nebo

$$J_x = \iint\limits_M y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} y^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,.$$

12. Volné tlumené kmity tělesa pohybujícího se podél osy y jsou popsány diferenciální rovnicí

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete, v jaké poloze se bude těleso nacházet po 2 s pohybu, jestliže startuje z rovnovážné polohy ve směru osy y počáteční rychlostí $30\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$. (20 bodů)

Řešení:
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -2$. Obecné řešení je proto tvaru

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 t \mathrm{e}^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínky

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 30,$$

odkud dostaneme

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 30,$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$y(t) = 30t\,\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Po 2 s pohybu bude těleso v poloze $y(2) = 60\,\mathrm{e}^{-4} \approx 1{,}099$.