Navazující magisterské studium – MATEMATIKA 2023 (22. května) – Skupina A

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

---

1. Zaměníme-li ve čtvercové matici dva řádky, determinant vzniklé matice:

a) se nezmění **b)** nebude existovat **c)** se zdvojnásobí **d)** změní znaménko **e)** bude poloviční (6 bodů)

---

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, 1, 1)$ a $\vec{v} = (3, 0, -2)$ (v tomto pořadí) je:

a) $(-2, 3, -3)$ **b)** $(-2, -3, -3)$ **c)** $(2, -3, 3)$ **d)** $(0, 0, -2)$ **e)** $(2, 3, 3)$ (6 bodů)

---

3. Je-li $A = [-3, 1, 1]$ a $B = [1, 4, 1]$, pak velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ je rovna:

a) $\sqrt{13}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt{5}$ **d)** 5 **e)** $\sqrt{2}$ (6 bodů)

---

4. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

je:

a) přímka $2x + 3y - 3 = 0$ **b)** přímka $2x - 3y + 3 = 0$ **c)** přímka $3x - 2y + 2 = 0$ **d)** kružnice **e)** přímka $3x + 2y - 2 = 0$ (6 bodů)

---

5. Normálovým vektorem přímky $y = x - 2$ v rovině je:

a) $(1, 1)$ **b)** $(1, -1)$ **c)** $(1, 1, 0)$ **d)** $(1, -1, -2)$ **e)** $(1, 0)$ (6 bodů)

---

6. Je-li $f(x, y) = \mathrm{e}^{y+x} \operatorname{tg} x$, pak:

a) $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{1+x} \operatorname{tg} x$ **b)** $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{y+x} \operatorname{tg} x$ **c)** $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{0} \operatorname{tg} x$ **d)** $f''_{yy}(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{y+x}}{\cos^2 x}$ **e)** $f''_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{y} \operatorname{tg} x$ (6 bodů)

---

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} < 0$, pak v bodě A:

a) nastává lokální mimimum funkce f **b)** má funkce f globální maximum **c)** je inflexní bod **d)** nastává lokální maximum funkce f **e)** lokální extrém funkce f nenastává (6 bodů)

---

8. Řešením diferenciální rovnice $y' + 3y = 0$ je funkce:

a) $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x}$ **b)** $y(x) = -\,\mathrm{e}^{-3x}$ **c)** $y(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$ **d)** $y(x) = x\,\mathrm{e}^{-3x}$ **e)** $y(x) = \frac{1}{3}x$ (6 bodů)

---

9. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\}$, pak hodnota integrálu $\iint\limits_A 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je rovna:

a) 2 **b)** 1 **c)** 0 **d)** π **e)** $\frac{1}{2}$ (6 bodů)

---

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \le 9,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$, po transformaci integrálu $\iint\limits_M (x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\int\limits_0^3 \varrho^2 \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi$ **b)** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^3 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi$ **c)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\int\limits_0^3 \varrho \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho$ **d)** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^3 \varrho^2 \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho$ **e)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\int\limits_0^3 \varrho^3 \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi$ (6 bodů)

OTOČTE!

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

---

11. Načrtněte oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x^2 = y$, $x + y = 2$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)

---

12. Ochlazování malé kuličky (tj. změna její teploty v čase) ponořené do lázně s kostantní teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$ je popsáno diferenciální rovnicí

$$T' = -\frac{1}{3}\,T.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete teplotu kuličky po $6\,\mathrm{s}$ ochlazování, jestliže na počátku byla teplota kuličky $30\,^\circ\mathrm{C}$. (20 bodů)