

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, pak $(A \cdot B)^T$ je rovno:

- a) $A \cdot B$ b) $B^T \cdot A^T$ c) $(B \cdot A)^T$ d) $A^T \cdot B^T$ e) $B^T + A^T$ (6 bodů)

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 1)$ a $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(0, 1, 1)$ b) $(0, -1, 1)$ c) $(0, -1, -1)$ d) $(1, 0, -1)$ e) $(1, 0, 1)$ (6 bodů)

3. Vzdálenost bodů $A = [-1, 1, 1]$, $B = [2, 1, 5]$ je rovna:

- a) $\sqrt{17}$ b) 2 c) 5 d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{2}$ (6 bodů)

4. Přímka v rovině procházející body $A = [2, 3]$ a $B = [0, 2]$ má rovnici:

- a) $2x - y + 4 = 0$ b) $x + 2y + 4 = 0$ c) $x - 2y + 4 = 0$ d) $2x + y + 4 = 0$ e) $3x - 2y = 0$ (6 bodů)

5. Směrovým vektorem přímky $x + y + 2 = 0$ v rovině je:

- a) $(1, -1, 2)$ b) $(1, -1)$ c) $(1, 1)$ d) $(1, 1, 0)$ e) $(0, 1)$ (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{x+y} \ln y$, pak:

- a) $f''_{xx}(x, y) = e^{1+y} \ln y$ b) $f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{y} e^{x+y}$ c) $f''_{xx}(x, y) = e^{x+y}$ d) $f''_{xx}(x, y) = e^x \ln y$
e) $f''_{xx}(x, y) = e^{x+y} \ln y$ (6 bodů)

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$, pak v bodě A :

- a) nastává lokální minimum funkce f b) má funkce f globální maximum c) je inflexní bod
d) lokální extrém funkce f nenastává e) nastává lokální maximum funkce f (6 bodů)

8. Funkce $y(x) = x e^x$ je řešením diferenciální rovnice:

- a) $y' = y + e^x$ b) $y' = xy$ c) $xy' = y + e^x$ d) $y' = y - e^x$ e) $y'' = y + x$ (6 bodů)

9. Je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}$, pak hodnota integrálu $\iiint_A 1 dx dy dz$ je rovna:

- a) 2 b) 6 c) 3 d) 0 e) 5 (6 bodů)

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

- a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$ b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varrho \right) d\varphi$ c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^2 d\varphi \right) d\varrho$ d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$ e) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^1 \varrho d\varphi \right) d\varrho$ (6 bodů)

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Uvažujme nosník trojúhelníkového průřezu. Ve zvoleném souřadném systému se jedná o pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$ a $C = [0, 1]$. Určete kvadratický moment průřezu vzhledem k delší odvěsně daného trojúhelníka.

Nápověda: Kvadratické momenty průřezu vzhledem k souřadným osám jsou dány vztahy $J_x = \iint_{\triangle ABC} y^2 dx dy$ a $J_y = \iint_{\triangle ABC} x^2 dx dy$ (20 bodů)

12. Volné tlumené kmity tělesa pohybujícího se podél osy y jsou popsány diferenciální rovnicí

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete, v jaké poloze se bude těleso nacházet po 2 s pohybu, jestliže startuje z rovnovážné polohy ve směru osy y počáteční rychlostí 30 mm s^{-1} . (20 bodů)