Navazující magisterské studium – MATEMATIKA 2023 (22. května) – Skupina B

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

---

1. Zaměníme-li ve čtvercové matici dva sloupce, determinant vzniklé matice:

a) se nezmění **b)** se zdvonásobí **c)** nebude existovat **d)** bude poloviční **e)** změní znaménko (6 bodů)

---

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, -2, 3)$ a $\vec{v} = (1, 0, 1)$ (v tomto pořadí) je:

a) $(-2, -3, 2)$ **b)** $(2, 3, 2)$ **c)** $(-2, 3, 2)$ **d)** $(0, 0, 3)$ **e)** $(-2, 3, -2)$ (6 bodů)

---

3. Je-li $A = [-1, 1, 1]$ a $B = [2, 1, 5]$, pak velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ je rovna:

a) $\sqrt{17}$ **b)** 5 **c)** 2 **d)** $\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{5}$ (6 bodů)

---

4. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

je:

a) přímka $2x - y - 2 = 0$ **b)** přímka $x + 2y - 1 = 0$ **c)** kružnice **d)** přímka $2x + y - 2 = 0$
e) přímka $x - 2y - 1 = 0$ (6 bodů)

---

5. Normálovým vektorem přímky $y = 3 - x$ v rovině je:

a) $(1, 1)$ **b)** $(1, -1)$ **c)** $(1, 1, 3)$ **d)** $(1, -1, 0)$ **e)** $(1, 0)$ (6 bodů)

---

6. Je-li $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$, pak:

a) $f''_{xy}(x, y) = \mathrm{e}^{2x}$ **b)** $f''_{xy}(x, y) = \mathrm{e}^{2x+1}$ **c)** $f''_{xy}(x, y) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+y}$ **d)** $f''_{xy}(x, y) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{x^2+y}$
e) $f''_{xy}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$ (6 bodů)

---

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} < 0$, pak v bodě A:

a) nastává lokální mimimum funkce f **b)** má funkce f globální maximum **c)** je inflexní bod
d) lokální extrém funkce f nenastává **e)** nastává lokální maximum funkce f (6 bodů)

---

8. Řešením diferenciální rovnice $y' - 2y = 0$ je funkce:

a) $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ **b)** $y(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ **c)** $y(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ **d)** $y(x) = -\,\mathrm{e}^{2x}$ **e)** $y(x) = \frac{1}{2}\,x$ (6 bodů)

---

9. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2y,\ 0 \le y \le 1\}$, pak hodnota integrálu $\iint\limits_A 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je rovna:

a) 1 **b)** 2 **c)** π **d)** 0 **e)** $\frac{1}{2}$ (6 bodů)

---

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$, po transformaci integrálu $\iint\limits_M x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \Big(\int\limits_0^3 \varrho^2 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\varrho$ **b)** $\int\limits_0^3 \Big(\int\limits_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\varrho$ **c)** $\int\limits_0^{\pi} \Big(\int\limits_0^3 \varrho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varrho \Big) \mathrm{d}\varphi$ **d)** $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \Big(\int\limits_0^3 \varrho \mathrm{d}\varrho \Big) \mathrm{d}\varphi$
e) $\int\limits_0^3 \Big(\int\limits_{-\pi/2}^0 \varrho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \Big) \mathrm{d}\varrho$ (6 bodů)

OTOČTE!

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Načrtněte oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x = y^2$, $x + y = 2$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)

12. Motorové sáně se pohybují přímočarým zrychleným pohybem, přičemž změna rychlosti v čase je popsána diferenciální rovnicí

$$v' = \frac{1}{10}\, v.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete jakou rychlostí se saně pohybovali na konci sledovaného úseku trvajícího $20\,\mathrm{s}$, jestliže na počátku tohoto úseku byla jejich rychlost $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (20 bodů)