

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů, za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

1. Zaměníme-li ve čtvercové matici dva řádky, determinant vzniklé matice:

- a) se nezmění b) nebude existovat c) se zdvojnásobí **d) změní znaménko** e) bude poloviční (6 bodů)

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (0, 1, 1)$ a $\vec{v} = (3, 0, -2)$ (v tomto pořadí) je:

- a) $(-2, 3, -3)$** b) $(-2, -3, -3)$ c) $(2, -3, 3)$ d) $(0, 0, -2)$ e) $(2, 3, 3)$ (6 bodů)

3. Je-li $A = [-3, 1, 1]$ a $B = [1, 4, 1]$, pak velikost vektoru \overrightarrow{AB} je rovna:

- a) $\sqrt{13}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ **d) 5** e) $\sqrt{2}$ (6 bodů)

4. Křivka s parametrickým vyjádřením

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

je:

- a) přímka $2x + 3y - 3 = 0$** b) přímka $2x - 3y + 3 = 0$ c) přímka $3x - 2y + 2 = 0$ d) kružnice
e) přímka $3x + 2y - 2 = 0$ (6 bodů)

5. Normálovým vektorem přímky $y = x - 2$ v rovině je:

- a) $(1, 1)$ **b) $(1, -1)$** c) $(1, 1, 0)$ d) $(1, -1, -2)$ e) $(1, 0)$ (6 bodů)

6. Je-li $f(x, y) = e^{y+x} \operatorname{tg} x$, pak:

- a) $f''_{yy}(x, y) = e^{1+x} \operatorname{tg} x$ **b) $f''_{yy}(x, y) = e^{y+x} \operatorname{tg} x$** c) $f''_{yy}(x, y) = e^0 \operatorname{tg} x$ d) $f''_{yy}(x, y) = \frac{e^{y+x}}{\cos^2 x}$
e) $f''_{yy}(x, y) = e^y \operatorname{tg} x$ (6 bodů)

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} < 0$, pak v bodě A :

- a) nastává lokální minimum funkce f b) má funkce f globální maximum c) je inflexní bod
d) nastává lokální maximum funkce f **e) lokální extrém funkce f nenastává** (6 bodů)

8. Řešením diferenciální rovnice $y' + 3y = 0$ je funkce:

- a) $y(x) = 2e^{3x}$ **b) $y(x) = -e^{-3x}$** c) $y(x) = xe^{3x}$ d) $y(x) = xe^{-3x}$ e) $y(x) = \frac{1}{3}x$ (6 bodů)

9. Je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$, pak hodnota integrálu $\iint_A 1 dx dy$ je rovna:

- a) 2 **b) 1** c) 0 d) π e) $\frac{1}{2}$ (6 bodů)

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$, po transformaci integrálu $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$ do polárních souřadnic dostaneme:

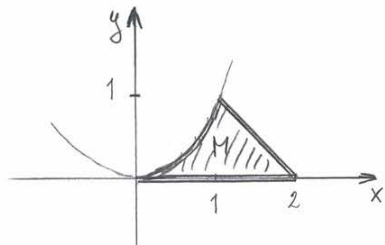
- a) $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^3 \varrho^2 d\varrho \right) d\varphi$ b) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$ c) $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^3 \varrho d\varphi \right) d\varrho$ d) $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \varrho^2 d\varphi \right) d\varrho$ **e) $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^3 \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi$** (6 bodů)

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Načrtněte oblast v 1. kvadrantu ohraničenou křivkami $x^2 = y$, $x + y = 2$, $y = 0$ a určete její obsah. (20 bodů)

Řešení:



Lze řešit různě, možná kombinace různých integrálů a vztahu pro obsah trojúhelníka. Např.

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2},$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx,$$

nebo

$$P(M) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx \right) dy = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y}) dy,$$

atd. Tedy

$$P(M) = \frac{5}{6}.$$

12. Ochlazování malé kuličky (tj. změna její teploty v čase) ponořené do lázně s konstantní teplotou 0°C je popsáno diferenciální rovnicí

$$T' = -\frac{1}{3} T.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete teplotu kuličky po 6 s ochlazování, jestliže na počátku byla teplota kuličky 30°C . (20 bodů)

Řešení:

Obecné řešení je tvaru

$$T(t) = c e^{-\frac{1}{3} t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

či

$$\ln |T| = -\frac{1}{3} t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínku

$$T(0) = 30,$$

odkud dostaneme

$$c = 30,$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$T(t) = 30 e^{-\frac{1}{3} t}.$$

Po 6 s ochlazování bude teplota kuličky $T(6) = 30 e^{-2} \approx 4,06$.