Navazující magisterské studium – MATEMATIKA 2023 (15. května) – Skupina A

Příjmení a jméno:

I. Testová část

V následujících problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte 6 bodů. Za nesprávnou odpověď se odečítá 1 bod.

---

1. K matici A existuje inverzní matice právě tehdy, když je:

a) obdélníková **b)** singulární **c)** čtvercová **d)** regulární **e)** nulová

(6 bodů)

---

2. Vektorovým součinem vektorů $\vec{u} = (1, 1, 0)$ a $\vec{v} = (3, 0, -2)$ (v tomto pořadí) je:

a) $(2, -2, 3)$ **b)** $(2, 2, 3)$ **c)** $(-2, -2, -3)$ **d)** $(3, 0, 0)$ **e)** $(-2, 2, -3)$

(6 bodů)

---

3. Vzdálenost bodů $A = [-3, 1, 1]$, $B = [1, 4, 1]$ je rovna:

a) $\sqrt{13}$ **b)** 5 **c)** 2 **d)** $\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{5}$

(6 bodů)

---

4. Přímka v rovině procházející body $A = [1, 0]$ a $B = [2, -2]$ má rovnici:

a) $2x + y - 2 = 0$ **b)** $2x - y - 2 = 0$ **c)** $x + 2y - 2 = 0$ **d)** $x - 2y - 2 = 0$ **e)** $x + y = 0$

(6 bodů)

---

5. Směrovým vektorem přímky $x - y - 3 = 0$ v rovině je:

a) $(1, -1)$ **b)** $(1, 1)$ **c)** $(1, -1, -3)$ **d)** $(1, 1, 0)$ **e)** $(0, 1)$

(6 bodů)

---

6. Je-li $f(x, y) = \mathrm{e}^{x + \ln y}$, pak:

a) $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^x$ **b)** $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^0$ **c)** $f''_{xx}(x, y) = y\,\mathrm{e}^x$ **d)** $f''_{xx}(x, y) = \mathrm{e}^{x + \ln y}$
e) $f''_{xx}(x, y) = (1 + 2y)\,\mathrm{e}^{x + \ln y}$

(6 bodů)

---

7. Je-li $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f a platí $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $\det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0$, pak v bodě A:

a) má funkce f globální maximum **b)** nastává lokální mimimum funkce f **c)** je inflexní bod
d) lokální extrém funkce f nenastává **e)** nastává lokální maximum funkce f

(6 bodů)

---

8. Funkce $y(x) = x \ln x$ je řešením diferenciální rovnice:

a) $y' = y + x$ **b)** $xy' = y + x$ **c)** $y'' = \frac{y+x}{x}$ **d)** $y' = \frac{y-x}{x}$ **e)** $y' = xy$

(6 bodů)

---

9. Je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ -2 \le z \le 0\}$, pak hodnota integrálu $\iiint\limits_A 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ je rovna:

a) 2 **b)** 3 **c)** 0 **d)** 6 **e)** 5

(6 bodů)

---

10. Je-li $M = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$, po transformaci integrálu $\iint\limits_M x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ do polárních souřadnic dostaneme:

a) $\int\limits_0^2 \big(\int\limits_0^\pi \varrho^2 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi\big) \mathrm{d}\varrho$ **b)** $\int\limits_0^\pi \big(\int\limits_0^2 \varrho^2 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi\big) \mathrm{d}\varrho$ **c)** $\int\limits_0^\pi \big(\int\limits_0^4 \varrho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varrho\big) \mathrm{d}\varphi$ **d)** $\int\limits_0^\pi \big(\int\limits_0^2 \varrho \mathrm{d}\varrho\big) \mathrm{d}\varphi$ **e)** $\int\limits_0^2 \big(\int\limits_0^\pi \varrho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\big) \mathrm{d}\varrho$

(6 bodů)

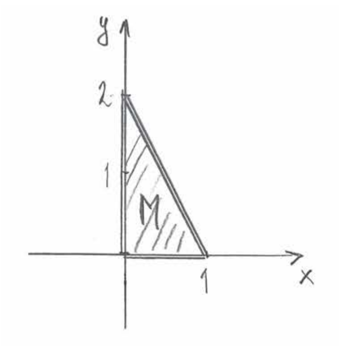
OTOČTE!

II. Početní část

Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.

11. Uvažujme nosník trojúhelníkového průřezu. Ve zvoleném souřadném systému se jedná o pravoúhlý trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 2]$. Určete kvadratický moment průřezu vzhledem k delší odvěsně daného trojúhelníka.
Nápověda: Kvadratické momenty průřezu vzhledem k souřadným osám jsou dány vztahy $J_x = \iint\limits_{\triangle ABC} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a $J_y = \iint\limits_{\triangle ABC} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (20 bodů)

Řešení:



Buď

$$J_y = \iint\limits_M x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2(2-2x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

nebo

$$J_y = \iint\limits_M x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} x^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^3 \mathrm{d}y = \frac{1}{6}\,.$$

12. Těleso kmitá podél osy y, přičemž jeho pohyb je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + 16y = 0.$$

Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice a dále určete, v jaké poloze se bude těleso nacházet po 5 s pohybu, jestliže startuje z počáteční polohy $y = 2$ s nulovou počáteční rychlostí. (20 bodů)

Řešení:
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 16 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 4\mathrm{i}$. Obecné řešení je proto tvaru

$$y(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dále hledáme řešení splňující počáteční podmínky

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0,$$

odkud dostaneme

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 0,$$

tj. řešení počáteční úlohy je tvaru

$$y(t) = 2\cos(4t).$$

Po 5 s pohybu bude těleso v poloze $y(5) = 2\cos(20) \approx 0{,}816$.